

**EIN ANFÄHREND ZUR DYNAMISCHEN
FINITE-ELEMENT-BERECHNUNG
DREIDIMENSIONALER BAUGRUNDMODELLE**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTOR-INGENIEURS
von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von
Dipl.-Ing. Horst Werkle
aus Dillingen/Saar

Karlsruhe 1981

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Februar 1981
Referent: o. Prof. Dr.-Ing. F. P. Müller
Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. W. Günther

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Beton und Stahlbeton der Universität Karlsruhe.

Herrn Prof. Dr.-Ing. F.P. Müller als Referent danke ich für seine stetige Förderung sowie für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse. Für die Übernahme des Korreferats danke ich Herrn Prof. Dr.rer.nat. W. Günther. Ebenso gilt mein Dank all denen, die mich bei der Arbeit unterstützten.

1. Einleitung	7
2. Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie	9
2.1 Fourier-Transformation zeitabhängiger Größen	9
2.2 Verzerrungen	10
2.3 Stoffgesetz	12
2.4 Gleichgewichtsbedingungen	15
2.5 Prinzip der virtuellen Arbeit	16
2.6 Grundgleichungen im zylindrischen Koordinatensystem	18
3. Finite-Element-Verfahren	22
3.1 Grundgleichungen	22
3.2 Isoparametrisches dreidimensionales Element	24
4. Randelemente	28
4.1 Allgemeines	28
4.2 Bodenmodelle ohne Randelemente	29
4.3 Randelemente für Kompressions-, Scher- und Rayleighwellen	30
4.4 Konsistente Randelemente	31
4.5 Randelemente für dreidimensionale Finite-Element-Modelle	33
5. Dreidimensionales Randelement	36
5.1 Randelement für rotationssymmetrische Systeme	36
5.1.1 Allgemeines	36
5.1.2 Ansatzfunktionen für das Verschiebungsfeld	37
5.1.3 Prinzip der virtuellen Verschiebungen	48
5.1.4 Eigenwertproblem der Bodenwellen	50
5.1.5 Steifigkeitsmatrix	54
5.1.6 Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen im Rande- element	58
5.2 Randelement für nicht rotationssymmetrische Systeme	58
5.2.1 Allgemeines	58
5.2.2 Kompatibilität mit anderen Elementtypen	59
5.2.3 Transformation der Randverschiebungen	62
5.2.4 Transformation der Randkräfte	78
5.2.5 Transformation der Steifigkeitsmatrix	85
5.2.6 Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen im Rand- element	86
6. Systeme mit einer oder mehreren Symmetrieachsen	87
6.1 Allgemeines	87
6.2 Reduktion der Steifigkeitsmatrix	87
6.3 Steifigkeitsmatrix für ein symmetrisches Teilsystem	90

7. Erdbebenerregung	98
7.1 Freifeldschwingungen einer viskoelastischen Bodenschicht	98
7.2 Erdbebenerregte Schwingungen von Systemen mit Randelementen	103
8. Berechnungsbeispiele	109
8.1 Nachgiebigkeitsfunktionen einer viskoelastischen Schicht	109
8.2 Erdbebenenberechnung eines eingebetteten Bauwerks	117
8.2.1 Allgemeine Systemeigenschaften	117
8.2.2 Modellabbildungen	118
8.2.2.1 Allgemeines	118
8.2.2.2 Untersuchte Modellabbildungen	120
8.2.2.3 Erdbebenanregung des Systems	121
8.2.3 Dreidimensionales Finite-Element-Modell	122
8.2.4 Stabmodell	128
8.2.5 Erdbebenerregung, Baugrundfederung und -dämpfung beim Stabmodell	128
8.2.6 Übertragungsfunktionen	140
8.2.6.1 Allgemeines	140
8.2.6.2 Übertragungsfunktionen der dreidimensionalen Finite-Element-Modelle	140
8.2.6.3 Übertragungsfunktionen des Stabmodells	141
8.2.7 Zeitverlaufsberechnungen	153
9. Zusammenfassung	163
Literatur	167
Anhang A: Schichtmatrizen nach /2/	172
Anhang B: Annäherung eines Kreises durch stückweise Parabeln zweiter Ordnung	181
Anhang C: Numerische Berechnung der Matrizen $\begin{bmatrix} S_{el} \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} A_{el} \end{bmatrix}$	185
Anhang D: Berechnung der Hankel-Funktionen	194
Anhang E: Programmierung	197
Zusammenstellung der Bezeichnungen und Symbole	198

1. EINLEITUNG

Bei vielen Aufgaben der Baudynamik, wie etwa bei der dynamischen Berechnung eingebetteter und unterirdischer Bauwerke, hat die Boden-Bauwerk-Wechselwirkung auf das Schwingungsverhalten und damit auch auf die auftretenden Beanspruchungen einen erheblichen Einfluß. Zur rechnerischen Untersuchung dieses Einflusses kann der Boden häufig als ein viskoelastisches, unendlich ausgedehntes Kontinuum aufgefaßt werden. Die dynamische Berechnung dieses Baugrundmodells ist auf analytischem Wege nur für einfache Systeme, etwa eine starre Kreisplatte auf einem elastischen Halbraum möglich. Bei komplizierten Geometrien des zu untersuchenden Systems sowie bei Baugrundmodellen mit örtlich veränderlichen dynamischen Bodenkennwerten ist eine analytische Lösung im allgemeinen nicht mehr möglich. In derartigen Fällen müssen numerische Verfahren angewandt werden, wobei sich die Methode der Finiten Elemente aufgrund ihrer guten Anpassungsmöglichkeiten an beliebige Geometrien und an örtlichen Veränderungen der Stoffkennwerte anbietet. Bei diesem Verfahren wird die gesamte zu untersuchende Struktur in Elemente endlicher Größe, sogenannte "Finite Elemente" unterteilt, deren Größe die Rechengenauigkeit des Verfahrens und deren Anzahl die Größe des zu behandelnden Gleichungssystems bestimmen. Wendet man das Verfahren auf die Berechnung von Baugrundmodellen an, so stellt sich das Problem, den theoretisch unendlich ausgedehnten Boden in einem endlichen Finite-Element-Modell abzubilden. Um zur Annäherung des unendlich ausgedehnten Kontinuums nicht endliche aber weit ausgedehnte Baugrundmodelle mit einer großen Anzahl Finiten Elemente abbilden zu müssen, führt man am Rand des zu untersuchenden Baugrundbereichs sogenannte "Randelemente" ein. Sofern diese Randelemente auf einer mechanisch vollständigen Lösung beruhen, d.h. sofern nicht näherungsweise Annahmen über das Verschiebungsfeld am Rand getroffen werden, geben sie die Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften des nicht in Finite Elemente diskretisierten Bereichs vollständig wieder. Derartige Randelemente werden für zweidimensionale Finite-Element-Modelle in /1/ und für dreidimensionale rotationssymmetrische Systeme in /2/ angegeben. In diesen Randelementen ist der Boden beliebig ge-

schichtet und nach unten durch eine starre Schicht begrenzt. Die dynamische Berechnung des Gesamtsystems erfolgt, da die Steifigkeitsmatrix der Randelemente frequenzabhängig ist, im Frequenzbereich.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Randelement für nicht-rotationssymmetrische Systeme angegeben. Es ermöglicht die dynamische Untersuchung dreidimensionaler Strukturen mit beliebiger Geometrie in einem beliebig geschichteten nach unten durch eine starre Schicht begrenzten Boden. Das Randelement ist zylinderförmig berandet. Das Baugrundmodell innerhalb des Zylinders wird mit dreidimensionalen isoparametrischen Elementen dargestellt.

Die Anwendung des Verfahrens wird an zwei Beispielen aufgezeigt. Im ersten Beispiel werden die Ergebnisse der Finite-Element-Berechnung mit einer analytischen Lösung verglichen. Dazu werden die dynamischen Verschiebungen für den Fall einer vertikalen Flächenlast auf einer viskoelastischen Schicht untersucht. Das zweite Beispiel behandelt die erdbebenerregten Schwingungen eines eingebetteten Bauwerks mit rechteckigem Grundriß. Der Einfluß verschiedener Modellabbildungen des Systems wird durch Vergleich der genaueren nicht-rotationssymmetrischen Lösung mit einer vereinfachten rotationssymmetrischen Lösung untersucht.

2. GRUNDGLEICHUNGEN DER LINEAREN ELASTIZITÄTSTHEORIE

2.1 Fourier-Transformation zeitabhängiger Größen

Bei einer dynamischen Berechnung sind die auftretenden Kräfte, Spannungen, Dehnungen und Verschiebungen zeitabhängige Größen. Jede periodische zeitabhängige Funktion $X(t)$ kann durch die Fourier-Reihe

$$X(t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \underline{X}(\Omega_j) \cdot e^{i \cdot \Omega_j \cdot t} \right) \quad (2.1)$$

als Überlagerung einer unendlichen Anzahl harmonischer Schwingungen dargestellt werden /3/. Die Kreisfrequenz Ω_j ist ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz Ω_0 , so daß gilt:

$$\Omega_0 = \frac{\Omega_j}{j} = \frac{2 \cdot \pi}{T_0} \quad (2.2)$$

Die komplexen Amplituden $\underline{X}(\Omega_j)$ der harmonischen Schwingungsanteile erhält man zu

$$\underline{X}(\Omega_j = 0) = \frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} X(t) dt \quad (2.3a)$$

$$\underline{X}(\Omega_j = \Omega_0 \cdot j) = \frac{2}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} X(t) \cdot e^{-i \cdot \Omega_j \cdot t} dt \quad (2.3b)$$

Auch nichtperiodische Vorgängen von begrenzter Dauer, wie sie beispielsweise bei Erdbebenzeitverläufen gegeben sind, kann man durch eine Fourier-Reihe darstellen, wenn man die Periode T_0 hinreichend groß wählt.

In Gl. (2.1) wurde von der komplexen Schreibweise zur Darstellung einer harmonischen Schwingung Gebrauch gemacht. Dabei gilt

$$\hat{X}(t) = \underline{X} \cdot e^{i \Omega t} \quad (2.4)$$

und

$$X(t) = \operatorname{Re}(\hat{X}(t)) = \operatorname{Re}(\underline{X} \cdot e^{i\Omega t}) \quad (2.4a)$$

wobei der Momentanwert $X(t)$ als Realteil der komplexen Funktion $\hat{X}(t)$ definiert wird. Die Beziehungen zur Ermittlung der Amplitude und des Phasenwinkels der harmonischen Schwingung sind für diese und andere Arten der Darstellung harmonischer Schwingungen in Tabelle 1 zusammengestellt. Da die komplexe Darstellung der harmonischen Schwingung rechentechnisch sehr vorteilhaft ist, wird sie im Folgenden für alle zeitabhängigen Größen verwendet.

Darstellung	Amplitude	Phase
$X(t) = X_0 \cdot \cos(\Omega \cdot t + \tilde{\varphi})$	X_0	$\tilde{\varphi}$
$X(t) = X_1 \cdot \cos \Omega \cdot t - X_2 \cdot \sin \Omega \cdot t$	$\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$	$\arctan\left(\frac{X_2}{X_1}\right)$
$X(t) = \operatorname{Re}(\underline{X} \cdot e^{i\Omega t})$	$\sqrt{\operatorname{Re}^2(\underline{X}) + \operatorname{Im}^2(\underline{X})}$	$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{X})}{\operatorname{Re}(\underline{X})}\right)$

Tabelle 1: Darstellung harmonischer Schwingungen

2.2 Verzerrungen

Gegeben sei das Verschiebungsfeld

$$\left\{ \underline{u} \right\} = \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

wobei die Verschiebungen \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} in der Darstellung nach Gl. (2.4) auf die drei Achsen eines kartesischen Koordinatensystems bezogen sind (Bild 1). Aus den Verschiebungen erhält man den Vektor der linearisierten Verzerrungen $\left\{ \underline{\varepsilon} \right\}$, der die Dehnungen $\underline{\varepsilon}_{xx}$, $\underline{\varepsilon}_{yy}$, $\underline{\varepsilon}_{zz}$ in Richtung der drei Koordinatenachsen sowie die Schiebungen (Ände-

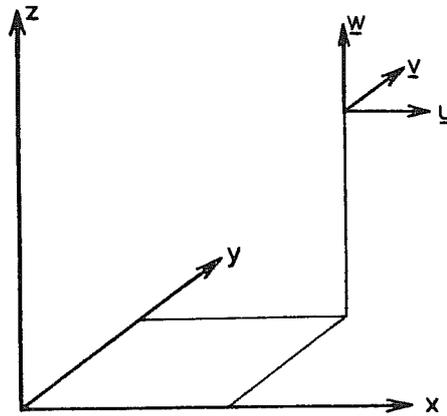


Bild 1: Verschiebungen im kartesischen Koordinatensystem

runge eines ursprünglich rechten Winkels) $\underline{\gamma}_{xy}$, $\underline{\gamma}_{yz}$, $\underline{\gamma}_{zx}$ beschreibt zu /4/:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}_x \\ \underline{\varepsilon}_y \\ \underline{\varepsilon}_z \\ \underline{\gamma}_{xy} \\ \underline{\gamma}_{yz} \\ \underline{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\{\underline{\varepsilon}\} = [\underline{\vartheta}] \cdot \{\underline{u}\} \quad (2.6a)$$

In Gleichung (2.6) wird im Rahmen der linearen Theorie vorausgesetzt, daß die Verschiebungsableitungen nach den Ortskoordinaten und mithin auch die Verzerrungen klein gegenüber 1 sind.

2.3 Stoffgesetz

Es wird ein isotroper, linear viskoelastischer Stoff vorausgesetzt. Die Baustoffdämpfung wird als hysteretische Dämpfung angesetzt. Damit läßt sich die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung im eindimensionalen Fall beschreiben zu

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon} \quad (2.7)$$

wobei

$$\underline{E} = E \cdot (1 + 2 \cdot \xi_E \cdot i) \quad (2.8)$$

den komplexen Elastizitätsmodul darstellt. Der Realteil E des komplexen Elastizitätsmoduls ist gleich dem physikalischen Elastizitätsmodul und beschreibt das elastische Stoffverhalten. Der Imaginärteil von \underline{E} beschreibt die Dämpfungseigenschaften des Stoffes mit dem hysteretischen Dämpfungsmaß ξ_E . Aufgrund der Baustoffdämpfung eilen bei einer harmonischen Schwingung die nach (2.7) ermittelten Spannungen $\text{Re}(\underline{\sigma} \cdot e^{i\Omega t})$ den Dehnungen $\text{Re}(\underline{\varepsilon} \cdot e^{i\Omega t})$ um den Phasenwinkel $\tilde{\varphi}_L$ mit

$$\tan \tilde{\varphi}_L = 2 \cdot \xi_E \quad (2.9)$$

voraus. Zur Untersuchung der momentanen Zuordnung einer Spannung σ_t und einer Dehnung ε_t kann man ohne Verlust an Allgemeingültigkeit die Schwingung

$$\sigma_t = \sigma_o \cdot \cos (\Omega \cdot t + \tilde{\varphi}_L) \quad (2.10a)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_o \cdot \cos (\Omega \cdot t) \quad (2.10b)$$

in der Schreibweise nach Tabelle 1, Zeile 1 untersuchen. Löst man die beiden Gleichungen so auf, daß die Zeitabhängigkeit eliminiert wird, erhält man

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_o} = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_o} \cdot \cos \tilde{\varphi}_L \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_o}\right)^2} \cdot \sin \tilde{\varphi}_L \quad (2.11)$$

Gleichung (2.11) beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung zu einem bestimmten Zeitpunkt einer harmonischen Schwingung als Ellipse. In Bild 2 sind für verschiedene Phasenwinkel $\tilde{\varphi}_L$ die nach (2.11) erhaltenen Kurven aufgetragen. Die Fläche innerhalb der Hysteresisschleife ist ein Maß für die innerhalb einer Periode dissipierte Energie.

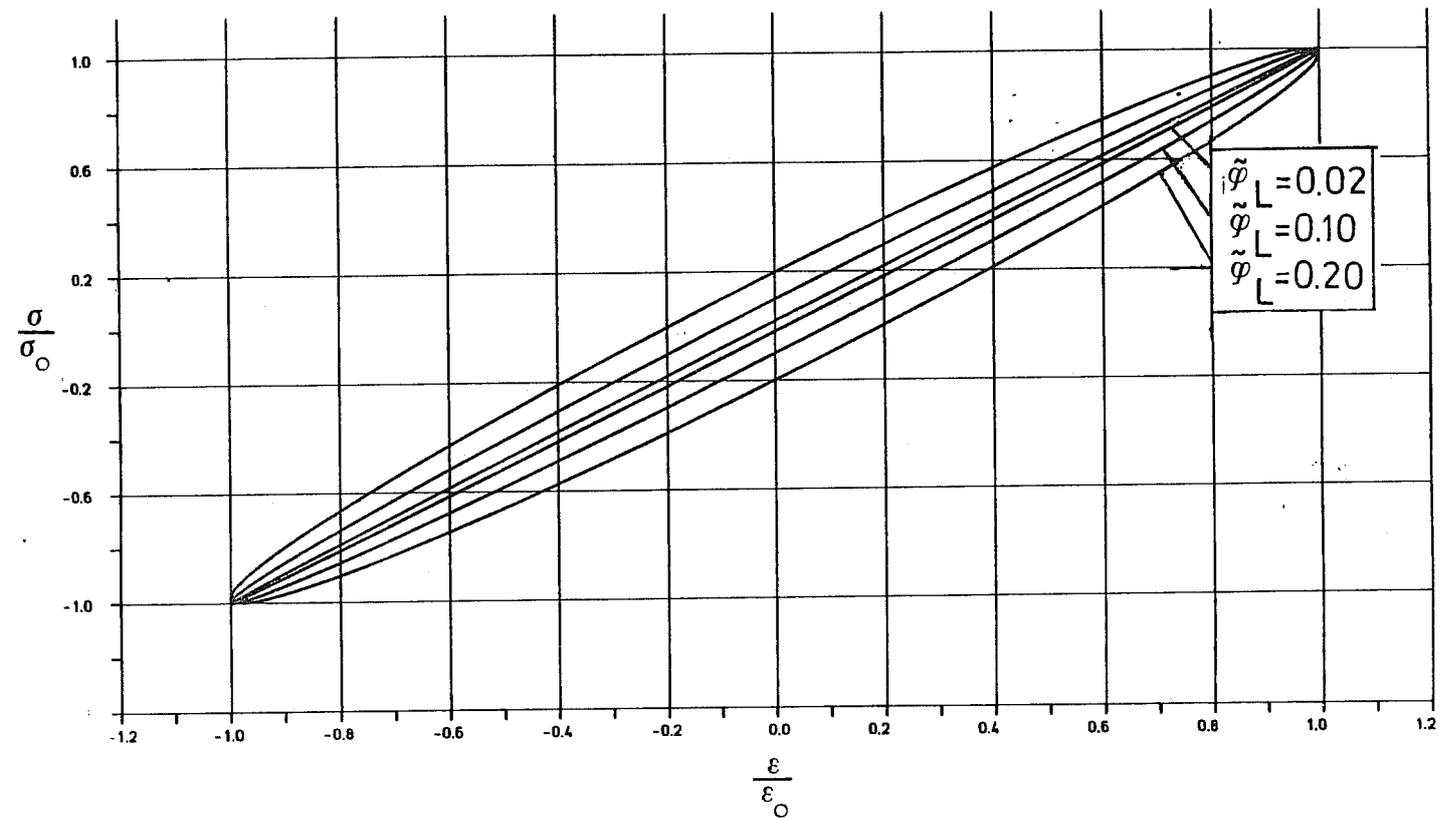


Bild 2: Spannungs-Dehnungs-Beziehung des viskoelastischen Stoffes

Im dreidimensionalen Fall gilt Gl. (2.8) sowohl in Bezug auf die Dehnungen als auch in Bezug auf die Schiebungen.

Die Dämpfung kann für Schubverformungen andere Werte annehmen als für Verformungen infolge von Normalspannungen. Bezeichnet man das hysteretische Dämpfungsmaß für Schubverformungen mit ξ_G , gilt für den komplexen Schubmodul \underline{G} :

$$\underline{G} = G \cdot (1 + 2 \cdot \xi_G \cdot i) \quad (2.12)$$

und für die komplexe Querdehnungszahl $\underline{\nu}$:

$$\underline{\nu} = \frac{\underline{E}}{2 \cdot \underline{G}} - 1 \quad (2.13)$$

Häufig ist es sinnvoll anstelle von Elastizitätsmodul und Querdehnungszahl die Laméschen Konstanten G und λ zu verwenden. Dabei ist G der Schubmodul und λ erhält man in komplexer Schreibweise aus \underline{E} und \underline{G} zu:

$$\underline{\lambda} = \frac{\underline{G} \cdot (\underline{E} - 2 \cdot \underline{G})}{3 \cdot \underline{G} - \underline{E}} \quad (2.14)$$

Ebenso kann man die komplexen Scherwellengeschwindigkeit \underline{V}_S und Kompressionswellengeschwindigkeit \underline{V}_L zu

$$\underline{V}_S = \sqrt{\frac{\underline{G}}{\rho}} \quad (2.15)$$

$$\underline{V}_L = \sqrt{\frac{\underline{\lambda} + 2\underline{G}}{\rho}} \quad (2.16)$$

einführen. Für kleine Dämpfungen, d.h. kleine Imaginärteile von $\underline{\lambda}$ und \underline{G} sind deren Realteile mit den physikalischen Scherwellen- bzw. Kompressionswellengeschwindigkeiten identisch /5/.

Die Stoffgleichungen im dreidimensionalen viskoelastischen Kontinuum, ausgedrückt mit dem komplexen Elastizitätsmodul \underline{E} und der Querdehnungszahl $\underline{\nu}$ lauten:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\sigma}_x \\ \underline{\sigma}_y \\ \underline{\sigma}_z \\ \underline{\tau}_{xy} \\ \underline{\tau}_{yz} \\ \underline{\tau}_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{\underline{E} \cdot (1-\underline{\nu})}{(1+\underline{\nu}) \cdot (1-2\underline{\nu})} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}} & \frac{\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}} & 1 & \frac{\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}} & \frac{\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\underline{\nu}}{2(1-\underline{\nu})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\underline{\nu}}{2(1-\underline{\nu})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\underline{\nu}}{2(1-\underline{\nu})} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}_x \\ \underline{\varepsilon}_y \\ \underline{\varepsilon}_z \\ \underline{\gamma}_{xy} \\ \underline{\gamma}_{yz} \\ \underline{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix}$$

(2.17)

$$\{ \underline{\sigma} \} = [\underline{D}] \cdot \{ \underline{\varepsilon} \} \quad (2.17a)$$

Der Vektor $\{ \underline{\sigma} \}$ enthält die den Elementen des Verzerrungsvektors $\{ \underline{\varepsilon} \}$ zugeordneten Komponenten des Spannungsvektors. $\underline{\nu}$ ist die Querdehnungszahl des viskoelastischen Stoffes.

2.4 Gleichgewichtsbedingungen

Die an einem Volumenelement angreifenden Kräfte einschließlich der Trägheitskräfte müssen zu jedem Zeitpunkt miteinander im Gleichgewicht stehen. An einem infinitesimalen Element des harmonisch schwingenden viskoelastischen Kontinuums mit den "Kantenlängen" dx , dy , dz , erhält man aus dem Kräftegleichgewicht in x-, y- und z-Richtung die Gleichgewichtsbedingungen für die Fourier-transformierten Größen zu:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_x \\ \underline{\sigma}_y \\ \underline{\sigma}_z \\ \underline{\tau}_{xy} \\ \underline{\tau}_{yz} \\ \underline{\tau}_{zx} \end{pmatrix} + \varrho \cdot \Omega^2 \cdot \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$[\vartheta]^T \cdot \{ \underline{\sigma} \} + \varrho \cdot \Omega^2 \cdot \{ \underline{u} \} = \{ 0 \} \quad (2.18a)$$

2.5 Prinzip der virtuellen Arbeit

Anstelle der Gleichgewichtsbedingungen kann auch ein Arbeitsprinzip der Mechanik angewandt werden.

Im Folgenden wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen verwendet, da dieses für die Herleitung des Finite-Element-Verfahrens auf der Grundlage des Deformationsverfahrens besonders geeignet ist. Es sagt aus, daß die Arbeit der äußeren Kräfte und der Volumen-Kräfte, die zufolge eines beliebigen virtuellen Verschiebungsfeldes, das mit den geometrischen Randbedingungen verträglich ist, geleistet wird, gleich ist der Änderung der durch die elastischen Kräfte und durch die Dämpfungskräfte verursachten inneren Arbeit. In der speziellen Form für harmonische Schwingungen lautet das Prinzip, bezogen auf die während einer Periode geleistete Arbeit /1/:

$$\int_V \{ \hat{\underline{\varepsilon}} \}^T \cdot \{ \underline{\sigma} \} dV - \varrho \Omega^2 \cdot \int_V \{ \hat{\underline{u}} \}^T \cdot \{ \underline{u} \} dV - \int_A \{ \hat{\underline{u}} \}^T \cdot \{ \underline{p} \} dA = 0 \quad (2.19)$$

Darin bedeutet $\{\underline{p}\}$ der Vektor der Oberflächenspannungen. Der Vektor $\{\underline{\hat{u}}\}$ enthält die konjugiert komplexen virtuellen Verschiebungen und $\{\underline{\hat{\epsilon}}\}$ die daraus resultierenden konjugiert komplexen virtuellen Verzerrungen. Die Integration über V erstreckt sich über das gesamte Volumen des untersuchten Körpers und die Integration über A über die gesamte Oberfläche, an der äußere Kräfte wirken.

Die virtuellen Verschiebungen sind kleine Verschiebungen, die geometrisch möglich und mit den Randbedingungen des Körpers verträglich sind und dort Null sind, wo an der Oberfläche des Körpers Verschiebungen vorgegeben sind.

Eine andere Form des Prinzips der virtuellen Verschiebungen erhält man, wenn man die virtuellen Dehnungen $\{\underline{\hat{\epsilon}}\}^T$ nach Gl. (2.6a) durch die virtuellen Verschiebungen ausdrückt und in Gl. (2.19) einsetzt. Diese Beziehung läßt sich dann schreiben zu

$$\int_V (\text{div}(\{\underline{\hat{u}}\}^T [\underline{\sigma}]) - \{\underline{\hat{u}}\}^T [\underline{\vartheta}]^T \{\underline{\sigma}\}) - \rho \Omega^2 \cdot \{\underline{\hat{u}}\}^T \{\underline{u}\}) dV - \int_A \{\underline{\hat{u}}\}^T \{\underline{p}\} dA = 0 \quad (2.20)$$

wobei die Divergenz eines Vektors $\{\underline{x}\}$ definiert ist zu

$$\text{div}(\{\underline{x}\}^T) = \text{div}(\{x_x, x_y, x_z\}) = \frac{\partial x_x}{\partial x} + \frac{\partial x_y}{\partial y} + \frac{\partial x_z}{\partial z}$$

Die Matrix

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \underline{\sigma}_x & \underline{\tau}_{xy} & \underline{\tau}_{xz} \\ \underline{\tau}_{xy} & \underline{\sigma}_y & \underline{\tau}_{yz} \\ \underline{\tau}_{xz} & \underline{\tau}_{yz} & \underline{\sigma}_z \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

enthält die Komponenten des Spannungsvektors.

Wendet man auf den ersten Term in Gl. (2.20) den Gaußschen Integralsatz an, läßt sich Gl. (2.20) schreiben zu:

$$\int_V \left\{ \hat{\underline{u}} \right\}^T \left(\left[\hat{\underline{\varphi}} \right]^T \cdot \left\{ \underline{\sigma} \right\} + \rho \cdot \Omega^2 \left\{ \underline{u} \right\} \right) dV + \int_A \left\{ \hat{\underline{u}} \right\}^T \cdot \left(- \left[\underline{\sigma} \right] \cdot \left\{ \underline{n} \right\} + \left\{ \underline{p} \right\} \right) dA = 0 \quad (2.22)$$

wobei $\{ \underline{n} \}$ den Einheitsvektor in Richtung der Normalen auf der Fläche A bezeichnet.

Da die virtuellen Verschiebungen zwar die geometrischen Randbedingungen erfüllen müssen, sonst aber frei wählbar sind, folgen aus dem ersten Integral in Gl. (2.22) die Gleichgewichtsbedingungen für das Volumenelement nach Gl. (2.18a) und aus dem zweiten Integral die Gleichgewichtsbedingungen für die Oberfläche des betrachteten Volumens.

2.6 Grundgleichungen im zylindrischen Koordinatensystem

Da der Beschreibung des Randelementes Zylinderkoordinaten zugrunde gelegt werden, sind im folgenden die wesentlichen Beziehungen noch einmal in Zylinderkoordinaten dargestellt.

Das Verschiebungsfeld wird in Zylinderkoordinaten durch die Verschiebungen \underline{u}_z , \underline{v}_z , \underline{w}_z in Richtung von r , φ und z nach Bild 3 beschrieben.

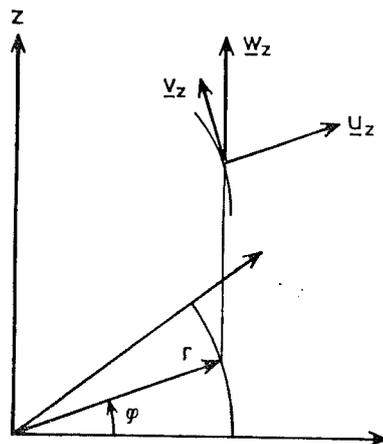


Bild 3: Verschiebungen im zylindrischen Koordinatensystem

Die Verschiebungs-Dehnungs-Beziehungen in Polarkoordinaten lauten:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}_{rr} \\ \underline{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \\ \underline{\varepsilon}_{zz} \\ \underline{\gamma}_{rz} \\ \underline{\gamma}_{r\varphi} \\ \underline{\gamma}_{\varphi z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & -\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{u}_z \\ \underline{v}_z \\ \underline{w}_z \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\{\underline{\varepsilon}_z\} = [\underline{\vartheta}_{z1}] \cdot \{\underline{u}_z\} \quad (2.23a)$$

Das Materialgesetz des isotropen viskoelastischen Stoffes hat wie in kartesischen Koordinaten die Form:

$$\begin{Bmatrix} \underline{\sigma}_{rr} \\ \underline{\sigma}_{\varphi\varphi} \\ \underline{\sigma}_{zz} \\ \underline{\tau}_{rz} \\ \underline{\tau}_{r\varphi} \\ \underline{\tau}_{\varphi z} \end{Bmatrix} = \frac{\underline{E}(1-\underline{\nu})}{(1+\underline{\nu})(1-2\underline{\nu})} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}} & \frac{\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}} & 1 & \frac{\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}} & \frac{\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\underline{\nu}}{2(1-\underline{\nu})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\underline{\nu}}{2(1-\underline{\nu})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\underline{\nu}}{2(1-\underline{\nu})} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}_{rr} \\ \underline{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \\ \underline{\varepsilon}_{zz} \\ \underline{\gamma}_{rz} \\ \underline{\gamma}_{r\varphi} \\ \underline{\gamma}_{\varphi z} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\{\underline{\sigma}_z\} = [\underline{D}] \cdot \{\underline{\varepsilon}_z\} \quad (2.24a)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten in zylindrischen Koordinaten:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & -\frac{1}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & 0 & \frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{\sigma}_{rr} \\ \underline{\sigma}_{\varphi\varphi} \\ \underline{\sigma}_{zz} \\ \underline{\tau}_{rz} \\ \underline{\tau}_{r\varphi} \\ \underline{\tau}_{\varphi z} \end{Bmatrix} + \varrho \cdot \Omega^2 \cdot \begin{Bmatrix} \underline{u}_z \\ \underline{v}_z \\ \underline{w}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\left[\vartheta_{z2} \right] \cdot \left\{ \underline{\sigma}_z \right\} + \varrho \cdot \Omega^2 \left\{ \underline{u}_z \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (2.25a)$$

Die beiden in Abschnitt 2.5 angegebenen Formen des Prinzips der virtuellen Verschiebungen lassen sich analog Gl. (2.19) und (2.22) in Polarkoordinaten schreiben:

$$\int_V \left\{ \hat{\underline{e}}_z \right\}^T \cdot \left\{ \underline{\sigma}_z \right\} dV - \varrho \Omega^2 \int_V \left\{ \hat{\underline{u}}_z \right\} \left\{ \underline{u}_z \right\} dV - \int_A \left\{ \hat{\underline{u}}_z \right\}^T \cdot \left\{ \underline{p}_z \right\} dA = 0 \quad (2.26)$$

$$\int_V \left\{ \hat{\underline{u}}_z \right\}^T \left(\left[\vartheta_{z2} \right] \cdot \left\{ \underline{\sigma}_z \right\} + \varrho \Omega^2 \left\{ \underline{u}_z \right\} \right) dV + \int_A \left\{ \hat{\underline{u}}_z \right\}^T \left(- \left[\underline{\sigma}_z \right] \cdot \left\{ \underline{n} \right\} + \left\{ \underline{p}_z \right\} \right) dA = 0 \quad (2.27)$$

mit

$$\begin{bmatrix} \sigma_z \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\varphi z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.27a)$$

3 FINITE-ELEMENT-VERFAHREN

3.1 Grundgleichungen

Das Verfahren der Finiten Elemente ist ein vielseitig anwendbares Verfahren zur Lösung statischer und dynamischer Probleme der Kontinuumsmechanik. Im Folgenden sollen die wesentlichen Beziehungen zur Berechnung der harmonischen Schwingungen von Strukturen mit viskoelastischem Materialverhalten nach dem Deformationsverfahren unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen zusammengestellt werden.

Für einen endlichen Ausschnitt aus dem Kontinuum, ein sogenanntes "Finites Element" geht man von einer Ansatzfunktion für die Verschiebungen aus, die das tatsächliche Verschiebungsfeld innerhalb des Elements annähert. Diese Ansatzfunktion muss bestimmte Bedingungen hinsichtlich ihrer Differenzierbarkeit und ihrer Verträglichkeit mit dem Verschiebungsfeld benachbarter Elemente erfüllen /6/. Das Verschiebungsfeld muß sich durch die Ansatzfunktionen in Abhängigkeit von den Verschiebungen $\{\underline{u}_e\}$ einzelner Punkte, den sogenannten Knotenpunkten des Elements, in der Form

$$\{\underline{u}\} = [N] \cdot \{\underline{u}_e\} \quad (3.1)$$

ausdrücken lassen. Die Matrix $[N]$ enthält die Ansatzfunktionen, und zwar entweder im globalen Koordinatensystem der gesamten Struktur oder in einem lokalen, auf das Element bezogenen Koordinatensystem.

Das diesem Verschiebungszustand entsprechende Verzerrungsfeld erhält man bei Beschreibung des Verschiebungsfeldes in kartesischen Koordinaten durch Anwendung des Differentialoperators $[\vartheta]$ nach Gl. (2.6a) zu

$$\{\underline{\varepsilon}\} = [B] \cdot \{\underline{u}_e\} \quad (3.2)$$

mit

$$[B] = [\vartheta] \cdot \{N\} \quad (3.2a)$$

Mit dem Hookschen Gesetz Gl. (2.17a) für das isotrope viskoelastische Material lauten die dem gewählten Verschiebungszustand entsprechenden Spannungen:

$$\{\underline{\sigma}\} = [\underline{D}] \cdot [B] \cdot \{\underline{u}_e\} \quad (3.3)$$

Die so erhaltenen Spannungen erfüllen nur dann die Gleichgewichtsbedingungen (2.18), wenn Gl. (3.1) die exakte Lösung für die Verschiebungen beschreibt. Eine näherungsweise Erfüllung des Gleichgewichts ist jedoch dann gegeben, wenn das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, Gl. (2.19) erfüllt ist. Macht man für die virtuellen Verschiebungen denselben Ansatz wie für die tatsächlichen Verschiebungen, also

$$\{\hat{\underline{u}}\} = [N] \cdot \{\hat{\underline{u}}_e\} \quad (3.4)$$

und damit

$$\{\hat{\underline{\varepsilon}}\} = [B] \cdot \{\hat{\underline{u}}_e\} \quad (3.4a)$$

und berücksichtigt man, daß das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für jeden beliebigen Verschiebungsvektor $\{\hat{\underline{u}}_e\}$ erfüllt sein muß, so folgt aus Gl. (3.1, 3.2, 3.3) zusammen mit Gl. (2.19) die Beziehung

$$[\underline{K}_e] \cdot \{\underline{u}_e\} - \Omega^2 \cdot [\underline{M}_e] \cdot \{\underline{u}_e\} = \{\underline{P}_e\} + \{\underline{P}_a\} \quad (3.5)$$

Darin bedeuten:

$$[\underline{K}_e] = \int [B]^T \cdot [\underline{D}] \cdot [B] \, dV \quad (3.6)$$

- Element-Steifigkeitsmatrix

$$[\underline{M}_e] = \rho \cdot \int [N]^T \cdot [N] \, dV \quad (3.7)$$

- Element-Massenmatrix,

$$\left\{ \underline{P}_e \right\} = \int [N]^T \left\{ \underline{P} \right\} dA \quad (3.8)$$

Vektor \underline{P} der durch die in x-, y- und z-Richtung wirkenden Oberflächenbelastung P_x , P_y , P_z (Kräfte pro Flächeneinheit)

$$\left\{ \underline{P} \right\} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

hervorgerufenen Knotenkräfte

$$\left\{ \underline{P}_a \right\}$$

Vektor der in den Elementknoten angreifenden äußeren Kräfte.

Die Integration erstreckt sich in den Gln. (3.6), (3.7) über das gesamte Volumen des Elements und in Gl.(3.8) über die gesamte Elementoberfläche. Gl. (3.5) ist eine Gleichgewichtsbedingung für die an einem Element wirkenden Knotenkräfte. Aus der Bedingung, daß am Gesamtsystem in jedem Knotenpunkt die Summe aller äußeren Kräfte und der Element-Knotenkräfte aller mit den Knotenpunkt verbundenen Elemente Null sein muß, erhält man die Gl. (3.5) entsprechende Gleichgewichtsbeziehung für das Gesamtsystem

$$\left[\underline{K}_s \right] \cdot \left\{ \underline{u}_s \right\} - \Omega^2 \cdot \left[\underline{M}_s \right] \left\{ \underline{u}_s \right\} = \left\{ \underline{P}_{es} \right\} + \left\{ \underline{P}_{as} \right\} \quad (3.10)$$

Der Vektor $\left\{ \underline{u}_s \right\}$ enthält die Verschiebungsgrößen in allen nicht festgehaltenen Freiheitsgraden (d.h. Komponenten der Knotenpunktverschiebungen) und die Vektoren $\left\{ \underline{P}_{es} \right\}$ und $\left\{ \underline{P}_{as} \right\}$ die diesen Freiheitsgraden zugeordneten Kraftgrößen. Die Systemsteifigkeitsmatrix $\left[\underline{K}_s \right]$ und die Massenmatrix $\left[\underline{M}_s \right]$ werden aus den Elementmatrizen $\left[\underline{K}_e \right]$ bzw. $\left[\underline{M}_e \right]$ durch Addition in den globalen Freiheitsgraden, die den Element-Freiheitsgraden entsprechen, gebildet.

3.2 Isoparametrisches dreidimensionales Element

Die Berechnung dreidimensionaler Kontinua ist mit verschiedenen Elementtypen, wie sie zum Beispiel in /7/ zusammengestellt sind,

möglich. Bei praktischen Berechnungen erweisen sich jedoch insbesondere sogenannte isoparametrische Elemente zur Beschreibung beliebiger Geometrien der vorgegebenen Strukturen als besonders geeignet. Unter einem isoparametrischen Element versteht man ein Element, dessen geometrische Form durch dieselben Ansatzfunktionen beschrieben wird wie die Verschiebungen innerhalb des Elements.

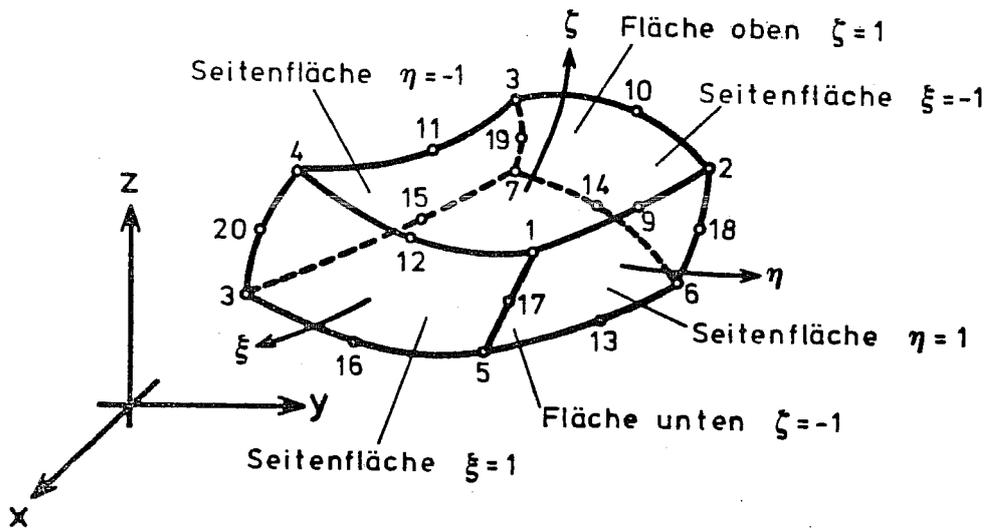
In dieser Arbeit soll das in Bild 4 dargestellte dreidimensionale Element mit 8 bis 20 Knotenpunkten nach /8/ verwendet werden. Für die Elementgeometrie und die Verschiebungen werden Geraden oder Parabeln zweiter Ordnung angesetzt. Bezeichnet man mit x_i, y_i, z_i die Knotenpunktkoordinaten des Punktes i und mit u_i, v_i, w_i seine Verschiebungen, dann wird die Geometrie des Elements durch

$$\begin{aligned} x &= \sum h_i \cdot x_i \\ y &= \sum h_i \cdot y_i \\ z &= \sum h_i \cdot z_i \end{aligned} \quad (3.11)$$

und das Verschiebungsfeld durch

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \sum h_i \cdot \underline{u}_i \\ \underline{v} &= \sum h_i \cdot \underline{v}_i \\ \underline{w} &= \sum h_i \cdot \underline{w}_i \end{aligned} \quad (3.12)$$

beschrieben. Die Polynome h_i nach Bild 4 hängen von den Elementkoordinaten ξ, η, ζ ab. Mit diesen Polynomen sind die Matrizen $[N]$ und $[B]$ nach Gl. (3.1) und (3.2) definiert, wobei der Vektor $\{\underline{u}_e\}$ die Knotenpunktverschiebungen $\underline{u}_i, \underline{v}_i, \underline{w}_i$ aller Knotenpunkte des Elements enthält. Die Ermittlung der Element-Steifigkeitsmatrix erfolgt nach Gl. (3.6). Dabei wird die Matrix $[D]$ für den isotropen, viskoelastischen Stoff nach Gl. (2.17) verwendet. Die Integration über das Volumen wird nach /8/ numerisch mit den Gausschen Integrationsformeln durchgeführt. Bei der Massenmatrix werden nach /9/ vereinfacht nur Punktmassen berücksichtigt. Sie hat dann die Form einer Diagonalmatrix



Ansatzfunktionen h_1 bis h_8 :

$$h_1 = g_1 - (g_9 + g_{12} + g_{17})/2 \quad h_6 = g_6 - (g_{13} + g_{14} + g_{18})/2$$

$$h_2 = g_2 - (g_9 + g_{10} + g_{18})/2 \quad h_7 = g_7 - (g_{14} + g_{15} + g_{19})/2$$

$$h_3 = g_3 - (g_{10} + g_{11} + g_{19})/2 \quad h_8 = g_8 - (g_{15} + g_{16} + g_{20})/2$$

$$h_4 = g_4 - (g_{11} + g_{12} + g_{20})/2 \quad h_j = \text{für } j = 9, \dots, 20$$

$$h_5 = g_5 - (g_{13} + g_{16} + g_{17})/2$$

mit:

$g_i = 0$ wenn Knotenpunkt i nicht vorhanden ist;

$g_i = G(\xi, \xi_i) \cdot G(\eta, \eta_i) \cdot G(\zeta, \zeta_i)$, wenn der Knotenpunkt i vorhanden ist.

Dabei ist die Funktion $G(\beta, \beta_i)$ definiert zu:

$$\text{bei } \beta_i = \pm 1: G(\beta, \beta_i) = \frac{1}{2} (1 + \beta_i \cdot \beta)$$

$$\text{bei } \beta_i = 0: G(\beta, \beta_i) = (1 - \beta^2)$$

β bedeutet jeweils ξ , η oder ζ

β_i ist der Wert der Funktion β am Knoten i

Bild 4: Ansatzfunktionen des dreidimensionalen isoparametrischen Elements mit variabler Anzahl von 8 bis 20 Knotenpunkten /8/

4. RANDELEMENTE

4.1 Allgemeines

Bei der Finite-Element-Berechnung von Baugrundmodellen stellt sich das Problem, den theoretisch unendlich ausgedehnten Baugrund in einem endlichen Finite-Element-Modell abzubilden. Für statische Untersuchungen wählt man den zu berechnenden Bodenausschnitt so groß, daß die am Rand des Finite-Element-Modells auftretenden Verschiebungen praktisch Null sind und damit die entsprechenden Freiheitsgrade ohne Verlust an Rechengenauigkeit als unverschieblich angenommen werden können. Bei dynamischer Belastung treten aufgrund der Ausbreitung elastischer Wellen in einem sehr viel größeren Bereich des Bodens Verschiebungen auf als unter einer entsprechenden statischen Last. Daher muß bei dynamischen Berechnungen ohne Randelemente ein verhältnismäßig großer Bereich des Bodens im Finite-Element-Modell erfasst werden, um sicherzustellen, daß am Rand reflektierte Bodenwellen keinen wesentlichen Einfluss auf den interessierenden Bereich des Baugrundmodells haben. Das ist dann gegeben, wenn die am Rand reflektierte Welle erst nach dem für die Berechnung interessierenden Zeitintervall das Bauwerk erreicht, oder wenn die Amplituden der reflektierten Wellen aufgrund der inneren Bodendämpfung stark abgeklungen sind.

Um die erforderliche Größe des in Finite Elemente diskretisierten Bodenbereichs gering zu halten, wurden besondere Randelemente entwickelt. Diese sollen die Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften des sich ins Unendliche erstreckenden Bodenbereichs besitzen. In Abschnitt 4.2 wird zunächst die Berechnung von Baugrundmodellen ohne Randelemente behandelt. Anschließend werden in den Abschnitten 4.3 bis 4.5 die bisher aus der Literatur bekannten Randelemente für zwei- und dreidimensionale Finite-Element-Modelle dargestellt.

4.2 Bodenmodelle ohne Randelemente

Der theoretisch unendlich ausgedehnte Baugrund kann für praktische Berechnungen durch ein allerdings verhältnismäßig großes Finite-Element-Modell angenähert werden.

So wird beispielsweise in /10/ die vertikale Federung eines Kreisfundaments mit einem rotationssymmetrischen Finite-Element-Modell mit festgehaltenen Rändern berechnet. In /11/, /12/ werden an ebenen Finite-Element-Modellen unterschiedlicher Größe die erdbeben-erregten Schwingungen eines Damms auf einer elastischen Bodenschicht untersucht. Eine ähnliche Berechnung für eingebettete Bauwerke wird in /13/ und /14/ an ebenen Modellen durchgeführt. In /15/ werden mit einem sehr ausgedehnten rotationssymmetrischen Baugrundmodell unter Entwicklung der nicht rotationssymmetrischen Verschiebungen (entsprechend Gl. (5.1)) in eine Fourier-Reihe die winderregten Schwingungen eines Kühlturms berechnet.

Da derartige Untersuchungen zu großen Baugrundmodellen führen, kommen häufig Rechenverfahren zur Anwendung, wie sie für Systeme mit vielen Freiheitsgraden entwickelt wurden. So unterteilt man nach /15/ das gesamte Elementnetz in Elementgruppen, sogenannte "Makroelemente" (auch als "Unterstrukturen" bezeichnet). Die Freiheitsgrade innerhalb des Makroelements werden aus dem Gleichungssystem für die Elementgruppe eliminiert, so daß die Kräfte am Rand des Makroelements durch die Verschiebungen am Rand ausgedrückt werden können. Dadurch entfallen im Gleichungssystem der Gesamtstruktur die Freiheitsgrade im Innern des Makroelements und die Zahl der Unbekannten wird erheblich reduziert. Das "Makroelement" kann sich auch auf die gesamte untersuchte Bodenschicht erstrecken /11/. Die Unbekannten sind dann nur noch die Verschiebungen in denjenigen Knotenpunkten, die unmittelbar mit dem Bauwerk verbunden sind. Eine derartige Formulierung der Strukturmatrizen setzt eine Berechnung im Frequenzbereich voraus.

4.3 Randelemente für Kompressions-, Scher- und Rayleighwellen

Die einfachsten Randelemente werden unter der Annahme hergeleitet, daß am Rand des Finite-Element-Modells reine Scher-, Kompressions- oder Rayleighwellen ankommen. Diese Randelemente haben die Form viskoser Dämpfer /16/. So erhält man etwa für eine ins Unendliche propagierende Scherwelle zwischen der Schubspannung $\underline{\tau}_o$ und der Verschiebung \underline{u}_o an einer Stelle "o" die Beziehung:

$$\underline{\tau}_o = \varrho \cdot \underline{v}_s \cdot i \cdot \Omega \cdot \underline{u}_o \quad (4.1)$$

und entsprechend für die Kompressionswelle

$$\underline{\sigma}_o = \varrho \cdot \underline{v}_L \cdot i \cdot \Omega \cdot \underline{v}_o \quad (4.2)$$

mit der Normalspannung $\underline{\sigma}_o$ an einer Stelle "o" und der Verschiebung \underline{v}_o in Richtung der Wellenausbreitung.

Da sich reine Scher-, Kompressions- und Rayleighwellen erst in einem gewissen Abstand von der Schwingungserregung ausbilden, führt die Verwendung dieser einfachen Randelemente immer noch zu Finite-Element-Modellen von erheblicher Größe.

Soll bei derartigen Berechnungen ein homogener Halbraum abgebildet werden, legt man die Dämpfer an der unteren horizontalen Begrenzung des Finite-Element-Modells zur Übertragung vertikal propagierender Kompressions- und Scherwellen aus. Die Dämpfer an den vertikalen Begrenzungen werden so bemessen, daß sie die Kompressions- und Scherwellenkomponenten einer reinen Rayleighwelle vollständig weiterleiten.

Dieses Randelement wurde in /17/ für den geschichteten Halbraum und in /18/ für anisotrope Materialien erweitert. Randelemente aus viskosen Dämpfern werden in /16/ für ein rotationssymmetrisches Finite-Element-Modell verwendet, mit dem die Federung eines kreisförmigen Fundaments auf dem elastischen Halbraum untersucht wird. Die Eignung von Störkörpern im Halbraum zur Abschirmung gegen Erschütterungen durch Rayleighwellen werden in /20/ an einem

zweidimensionalen Finite-Element-Modell untersucht.

Der erforderliche Abstand zwischen dem Angriffspunkt einer Schwingungserregung (z.B. einem Maschinenfundament) und dem Rand hängt von der Größe der inneren Bodendämpfung und der Art der Erregung ab. Vergleichende Untersuchungen wurden beispielsweise an ebenen Modellen mit einem Streifenfundament auf einer viskoelastischen Schicht durchgeführt /19/. Danach soll bei mittleren Bodendämpfungen und harmonischen Schwingungen der Abstand des Randelements für reine Rayleighwellen vom Fundament das 5- bis 10-fache der Breite des Fundaments betragen. Da dies immer noch zu verhältnismäßig großen Baugrundmodellen führt, ist die Anwendung von Unterstruktur-Verfahren auch bei der Anwendung viskoser Dämpfer als Randelemente sinnvoll. Dabei wird der Bodenbereich zwischen dem interessierenden Rand und den Randelementen für reine Scher-, Kompressions- bzw. Rayleighwellen als Unterstruktur berechnet /20/, /21/.

4.4 Konsistente Randelemente

Ein wesentlicher Fortschritt in der Theorie der Randelemente wurde erst durch die Entwicklung konsistenter Randelemente nach /1/ erreicht. Unter einem konsistenten Randelement versteht man ein Finites Element, das die Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften einer unendlich ausgedehnten viskoelastischen Schicht besitzt und dessen Verschiebungsfeld mit dem Verschiebungsfeld der Elemente des diskretisierten Baugrundbereichs verträglich ist. Die Anwendung konsistenter Randelemente setzt eine Berechnung im Frequenzbereich voraus. Bei ihrer Herleitung handelt es sich um ein halb-analytisches Verfahren. Als Ansatzfunktionen für das Verschiebungsfeld enthalten die Randelemente in horizontaler Richtung nämlich die analytische Lösung der Differentialgleichungen des Kontinuums. In vertikaler Richtung werden wie bei Finiten Elementen Ansätze z.B. mit stückweise linearen oder quadratischen Verschiebungen gemacht. Diese Ansatzfunktionen werden so gewählt, daß die Verträglichkeit

mit dem an das Randelement anschließenden diskretisierten Bereich gegeben ist. Für das Randelement erhält man eine frequenzabhängige komplexe Steifigkeitsmatrix, die die Knotenpunkte und die Verschiebungen am Rand miteinander verknüpft.

Konsistente Randelemente bieten den Vorteil einer mechanisch vollständigen Beschreibung der sich ins Unendliche erstreckenden Bodenschicht, ohne daß Annahmen über die am Rand eintreffenden Wellenarten wie bei den viskosen Dämpfern nach Abschnitt 4.3 getroffen werden müssen. Deshalb kann dieses Randelement unmittelbar am interessierenden Baugrundbereich angeordnet werden. Für Berechnungen im Frequenzbereich sollten daher konsistente Randelemente verwendet werden /19/.

Konsistente Randelemente werden in /1/ für ebene Systeme von geschichteten Böden entwickelt. Dabei wird zwischen den beiden Fällen unterschieden, daß das Verschiebungsfeld ausschließlich Komponenten in der Systemebene (verallgemeinerte Rayleighwellen) oder ausschließlich Komponenten senkrecht zur Systemebene (verallgemeinerte Love-Wellen) enthält. Auch für rotationssymmetrische Systeme sind in /1/ Randelemente angegeben. Das Verschiebungsfeld ist in Bezug auf die Symmetrieachse entweder symmetrisch (verallgemeinerte Rayleighwelle) oder antimetrisch (verallgemeinerte Love-Welle).

Das zweidimensionale Randelement nach /1/ wurde in /2/ für rotationssymmetrische Strukturen mit nicht-rotationssymmetrischem Verschiebungsfeld erweitert. Dieses Randelement ermöglicht für rotationssymmetrische Systeme eine sehr effektive dreidimensionale Finite-Element-Berechnung. Als Beispiel ist in Bild 5 das Bodenmodell für ein rotationssymmetrisches Reaktorgebäude einer Kernkraftwerksanlage dargestellt /35/. Das Randelement schließt sich direkt an den in Finite Elemente diskretisierten Bodenbereich an.

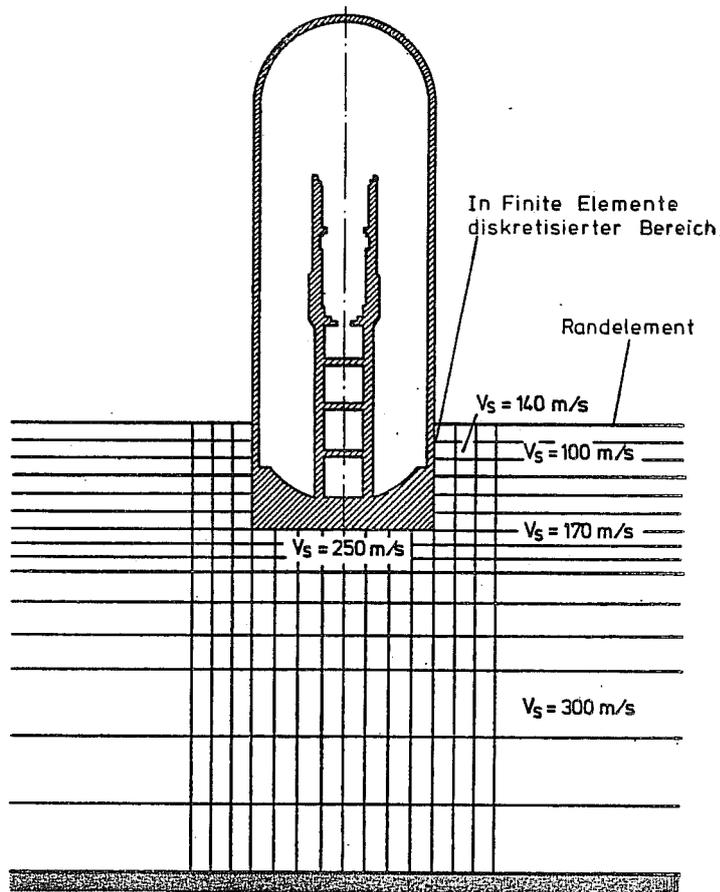


Bild 5: Baugrundmodell mit Finiten Elementen und Randelement

4.5 Randelemente für dreidimensionale Finite-Element-Modelle

Für die Abbildung des dreidimensionalen viskoelastischen Halbraums durch ein endliches dreidimensionales nicht rotationssymmetrisches Finite-Element-Modell gelten dieselben Kriterien wie bei zweidimensionalen Modellen. Allerdings steigt der Rechenaufwand wegen der sehr viel größeren Anzahl an Freiheitsgraden gegenüber einer zweidimensionalen (ebenen oder rotationssymmetrischen) Berechnung erheblich an.

Dreidimensionale Finite-Element-Modelle ohne Randelemente führen im allgemeinen zu einer so großen Zahl von Freiheitsgraden, daß eine Berechnung mit den heutigen Rechenanlagen praktisch nicht mehr

möglich ist. Auch bei Verwendung viskoser Dämpfer nach /16/ als Randelemente ist der Rechenaufwand erheblich /22/, /23/. Deshalb werden in der Literatur vereinfachte Modelle vorgeschlagen, die eine näherungsweise Berechnung des dreidimensionalen Kontinuums ermöglichen sollen. So wird in /24/ ein dreidimensionales Bodenmodell mit viskosen Dämpfern nach /16/ als Randelemente bei horizontaler Erdbebenerregung untersucht. Zur Verringerung des Rechenaufwandes werden für die Verschiebungen nur horizontale Freiheitsgrade in einer Richtung zugelassen, während alle übrigen Freiheitsgrade des Bodenmodells festgehalten sind. Eine genaue Beurteilung des Einflusses dieser Vereinfachung auf die Ergebnisse ist nicht möglich, da Vergleichsrechnungen mit genaueren Verfahren fehlen.

Ein anderes Näherungsverfahren wird in /25/ angegeben. Dabei geht man von einem zweidimensionalen ebenen Bodenmodell aus. Die dreidimensionale Natur des dynamischen Verhaltens des Bodens wird näherungsweise dadurch berücksichtigt, daß viskose Dämpfer für Scherwellen nach Gl. (4.1) an allen in der Ebene liegenden Verschiebungsfreiheitsgraden des Bodenmodells angebracht werden. Dadurch soll die Scherwellenausbreitung senkrecht zur untersuchten Ebene simuliert werden. Dieses Berechnungsverfahren wurde in das Programmsystem FLUSH /26/ implementiert. Obwohl diese Vorgehensweise wegen der erheblichen Verringerung des Aufwandes für praktische Berechnungen vorteilhaft ist, sind die Bedingungen, unter denen das Verfahren für dreidimensionale Baugrundmodelle hinreichend genaue Ergebnisse liefert, nicht genügend bekannt. So wurde beispielsweise in /27/ darauf hingewiesen, daß die statische Federung eines Bauwerks an einem rein ebenen Modell berechnet wird.

Den bisherigen Berechnungsverfahren dreidimensionaler nicht rotationssymmetrischer Finite-Element-Modelle liegen also bestimmte Annahmen über das Verschiebungsfeld des Systemes zugrunde. Auf solche Annahmen kann wegen des Umfangs der numerischen Berechnungen nur dann verzichtet werden, wenn der im Finite-Element-Modell abzubildende Bodenausschnitt auf den unmittelbar zu untersuchenden Bereich des Baugrunds beschränkt werden kann. Dies ist in noch sehr viel größerem Maße als bei zweidimensionalen

Systemen nur bei Verwendung konsistenter Randelemente möglich. Dazu wird in der vorliegenden Arbeit das rotationssymmetrische Randelement mit nicht rotationssymmetrischem Verschiebungsfeld verwendet. Da dieses Randelement in der Formulierung nach /2/ nur für rotationssymmetrische Systeme verwendet werden kann, wird es durch eine geeignete Transformation für nicht-rotationssymmetrische Modelle erweitert.

5. DREIDIMENSIONALES RANDELEMENT

5.1 Randelement für rotationssymmetrische Systeme

5.1.1 Allgemeines

Da das dreidimensionale rotationssymmetrische Randelement hier für nicht rotationssymmetrische Strukturen verwendet werden soll, wird zunächst seine Herleitung kurz angegeben (vgl. auch die komprimierte Darstellung in /41/). In Abschnitt 5.2 wird dann gezeigt, wie man durch eine geeignete Transformation das Randelement für nicht-rotationssymmetrische Strukturen erhält.

Zur Ableitung der Steifigkeitsmatrix des Randelements geht man wie folgt vor: Alle ortsabhängigen Größen, die innerhalb des Randelements in Zylinderkoordinaten beschrieben werden, werden in eine Fourierreihe über den Öffnungswinkel φ des Koordinatensystems entwickelt. Als Ansatzfunktion für den Verlauf der Verschiebungen in Richtung des Radius r wird die exakte analytische Lösung verwendet. Diese erhält man mit den Wellenzahlen als freie Parameter aus der allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichung für das viskoelastische Kontinuum. In vertikaler Richtung werden die Verschiebungen durch Ansätze wie bei Finiten Elementen, hier durch stückweise lineare oder quadratische Funktionen beschrieben. Die mit diesen Ansatzfunktionen bestimmten Spannungen und Dehnungen führt man in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ein und erhält damit ein Eigenwertproblem mit den Wellenzahlen als Eigenwerte für eine endliche Anzahl von Bodenwellen. Für eine beliebige Verschiebung, die sich aus allen Bodenwellen zusammensetzt, kann man die Spannungen und die Knotenpunktskräfte am Elementrand bestimmen. Zur Formulierung der Steifigkeitsmatrix des Randes werden die Knotenpunktskräfte durch die Verschiebungen am Elementrand ausgedrückt. Bei diesem Vorgehen wird lediglich die der Finite-Element-Theorie entsprechende Annahme getroffen, daß sich die Verschiebungen über die Höhe durch stückweise lineare oder quadratische Funktionen beschreiben lassen. Bei einer Vergrößerung der Anzahl der Bodenschichten, d.h. der Abschnitte der Ansatz-

funktionen über die Höhe kann die theoretisch exakte Lösung beliebig genau approximiert werden.

5.1.2 Ansatzfunktionen für das Verschiebungsfeld

Ein Verschiebungsfeld in Zylinderkoordinaten nach Bild 3 läßt sich immer durch die Fourierreihe

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{u}_z \\ \bar{w}_z \\ \bar{v}_z \end{Bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} \cos n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -\sin n\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u}_{\text{sym},n} \\ \bar{w}_{\text{sym},n} \\ \bar{v}_{\text{sym},n} \end{Bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \sin n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{u}_{\text{ant},n} \\ \bar{w}_{\text{ant},n} \\ \bar{v}_{\text{ant},n} \end{Bmatrix} \right) \quad (5.1) \end{aligned}$$

$$\left\{ \bar{u}_z \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[\Phi_{\text{sym},n} \right] \cdot \left\{ \bar{u}_{\text{sym},n} \right\} + \left[\Phi_{\text{ant},n} \right] \cdot \left\{ \bar{u}_{\text{ant},n} \right\} \right) \quad (5.1a)$$

ausdrücken. Der Index "sym" bedeutet dabei ein bezogen auf die Koordinatenachse $\varphi = 0$ symmetrisches und "ant" ein antimetrisches Verschiebungsfeld. Das gesamte Verschiebungsfeld setzt sich somit aus einem symmetrischen und einem antimetrischen Verschiebungsfeld zusammen.

Ebenso lassen sich die Verzerrungen in eine Fourierreihe entwickeln:

$$\begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}_{rr} \\ \underline{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \\ \underline{\varepsilon}_{zz} \\ \underline{\gamma}_{rz} \\ \underline{\gamma}_{r\varphi} \\ \underline{\gamma}_{\varphi z} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \cos n\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin n\varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\underline{\varepsilon}}_{rr, \text{sym}} \\ \bar{\underline{\varepsilon}}_{\varphi\varphi, \text{sym}} \\ \bar{\underline{\varepsilon}}_{zz, \text{sym}} \\ \bar{\underline{\gamma}}_{rz, \text{sym}} \\ \bar{\underline{\gamma}}_{r\varphi, \text{sym}} \\ \bar{\underline{\gamma}}_{\varphi z, \text{sym}} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \sin n\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin n\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos n\varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\underline{\varepsilon}}_{rr, \text{ant}} \\ \bar{\underline{\varepsilon}}_{\varphi\varphi, \text{ant}} \\ \bar{\underline{\varepsilon}}_{zz, \text{ant}} \\ \bar{\underline{\gamma}}_{rz, \text{ant}} \\ \bar{\underline{\gamma}}_{r\varphi, \text{ant}} \\ \bar{\underline{\gamma}}_{\varphi z, \text{ant}} \end{pmatrix}$$

(5.2)

$$\left\{ \underline{\varepsilon}_z \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[\Phi_{\varepsilon, \text{sym}, n} \right] \cdot \left\{ \bar{\underline{\varepsilon}}_{\text{sym}, n} \right\} + \left[\Phi_{\varepsilon, \text{ant}, n} \right] \cdot \left\{ \bar{\underline{\varepsilon}}_{\text{ant}, n} \right\} \right) \quad (5.2a)$$

Analog ergibt sich die Fourierreihe für die Spannungen zu:

$$\left\{ \underline{\sigma}_z \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[\Phi_{\sigma, \text{sym}, n} \right] \cdot \left\{ \bar{\underline{\sigma}}_{\text{sym}, n} \right\} + \left[\Phi_{\sigma, \text{ant}, n} \right] \cdot \left\{ \bar{\underline{\sigma}}_{\text{ant}, n} \right\} \right) \quad (5.3)$$

wobei die Vektoren $\left\{ \bar{\underline{\sigma}}_{\text{sym}, n} \right\}$ und $\left\{ \bar{\underline{\sigma}}_{\text{ant}, n} \right\}$ die Fourier-Terme des Spannungsvektors für das symmetrische und antimetrische Verschle-

bungsfeld bedeuten. Zwischen den Spannungen und den Verschiebungen gilt für jeden Fourier-Term das Hooksche Gesetz des viskoelastischen Stoffes Gl. (2.24). Es ist:

$$\left\{ \bar{\sigma}_{\text{sym},n} \right\} = \left[\underline{D} \right] \cdot \left\{ \bar{\varepsilon}_{\text{sym},n} \right\} \quad (5.4a)$$

$$\left\{ \bar{\sigma}_{\text{ant},n} \right\} = \left[\underline{D} \right] \cdot \left\{ \bar{\varepsilon}_{\text{ant},n} \right\} \quad (5.4b)$$

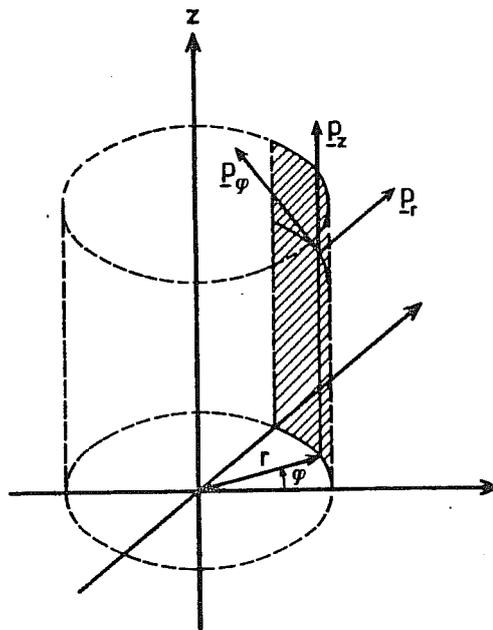


Bild 6: Spannungen im zylindrischen Koordinatensystem

Äußere Flächenlasten, die in Richtung der r , z , und φ -Richtung auf einen vertikalen Rand wirken, entsprechen den inneren Spannungen σ_{rr} , τ_{rz} und $\tau_{r\varphi}$ (Bild 6). Ihre Fourier-Darstellung lautet daher:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} P_r \\ P_z \\ P_\varphi \end{Bmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} \cos n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \cos n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -\sin n\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_{r, \text{sym}, n} \\ \bar{P}_{z, \text{sym}, n} \\ \bar{P}_{\varphi, \text{sym}, n} \end{Bmatrix} \right. \\
&+ \left. \begin{bmatrix} \sin n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_{r, \text{ant}, n} \\ \bar{P}_{z, \text{ant}, n} \\ \bar{P}_{\varphi, \text{ant}, n} \end{Bmatrix} \right) \quad (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} P_z \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \left([\Phi_{\text{sym}, n}] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{P}_{\text{sym}, n} \end{Bmatrix} + [\Phi_{\text{ant}, n}] \cdot \begin{Bmatrix} \bar{P}_{\text{ant}, n} \end{Bmatrix} \right) \quad (5.5a)$$

Ist das Verschiebungsfeld in allgemeiner Form gegeben, erhält man die Vektoren der Fouriert Terme der Verschiebungen zu:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_{\text{sym}, n} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{n0}\right) \cdot \int_0^{2\pi} [\Phi_{\text{sym}, n}] \cdot \begin{Bmatrix} u_z \end{Bmatrix} d\varphi \quad (5.6a)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_{\text{ant}, n} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{n0}\right) \cdot \int_0^{2\pi} [\Phi_{\text{ant}, n}] \cdot \begin{Bmatrix} u_z \end{Bmatrix} d\varphi \quad (5.6b)$$

Entsprechende Beziehungen gelten auch für die Fouriert Terme der Spannungen, Verzerrungen und Flächenlasten.

Mit den Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cdot \sin n\varphi \, d\varphi = (\delta_{mn} - \delta_{m0} \cdot \delta_{n0}) \cdot \pi \quad (5.7a)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cdot \cos n\varphi \, d\varphi = (\delta_{mn} - \delta_{m0} \cdot \delta_{n0}) \cdot \pi \quad (5.7b)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cdot \cos n\varphi \, d\varphi = 0 \quad (5.7c)$$

kann man für Stoffe mit isotropem oder einem zur z-Achse rotations-symmetrischen orthotropem Stoffgesetz zeigen, daß die Fourierterme der Verschiebungen und Spannungen für zwei Terme m und n voneinander unabhängig sind, sofern nicht $n = m$ ist /40/. Das bedeutet, daß die einzelnen Terme der Spannungen und Verschiebungen sich entkoppeln lassen, so daß sich jeder Term der Spannungen ausschließlich durch einen einzigen Term der Verschiebungen ausdrücken läßt. Somit erreicht man durch Einführen der Fourierzerlegung eine Reduktion von drei auf zwei Ortskoordinaten.

Die beiden noch verbleibenden Ortskoordinaten sind r und z. Zur Beschreibung der Abhängigkeit des Verschiebungsfeldes von der r-Richtung wird die analytische Lösung verwendet. Dazu müssen zunächst die Differentialgleichungen des viskoelastischen Kontinuums in Zylinderkoordinaten formuliert und gelöst werden.

Die Differentialgleichung der Bewegung für das viskoelastische Kontinuum erhält man, indem man in der Gleichgewichtsbedingung, Gl. (2.25) die Spannungen mit Gl. (2.24) durch die Dehnungen und diese wiederum mit Gl. (2.23) durch die Verschiebungen ausdrückt zu:

$$\left[\vartheta_{z2} \right] \cdot \left[\underline{D} \right] \cdot \left[\vartheta_{z1} \right] \cdot \left\{ \underline{u}_z \right\} + \varrho \cdot \Omega^2 \cdot \left\{ \underline{u}_z \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (5.8)$$

In dieser Beziehung werden die Verschiebungen $\left\{ \underline{u}_z \right\}$ mit Gl. (5.1) als Darstellung einer Fourierreihe über den Winkel φ eingesetzt und die in den Differentialoperatoren $\left[\vartheta_{z1} \right]$ und $\left[\vartheta_{z2} \right]$ vorgeschriebenen Differentiationen nach φ ausgeführt. Mit der Bedingung, daß das so erhaltene Gleichungssystem für jeden Winkel φ gelten muß, lassen sich die Summenglieder der Fourierreihe entkoppeln. Das damit für jeden Term n der Fourier-Reihe erhaltene Gleichungssystem lautet:

$$\begin{bmatrix} (\underline{\lambda}+2\underline{G}) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2\underline{G} \frac{n}{r} \bar{\omega}_z + 2\underline{G} \frac{\partial \bar{\omega}_\varphi}{\partial z} + \varrho \Omega^2 \bar{u}_{\text{sym},n} \\ (\underline{\lambda}+2\underline{G}) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial z} - 2 \frac{\underline{G}}{r} \frac{\partial(r \cdot \bar{\omega}_\varphi)}{\partial r} - 2\underline{G} \frac{n \cdot \bar{\omega}_r}{r} + \varrho \Omega^2 \bar{w}_{\text{sym},n} \\ (\underline{\lambda}+2\underline{G}) \cdot \frac{n \Delta}{r} - 2\underline{G} \frac{\partial \bar{\omega}_r}{\partial z} + 2\underline{G} \frac{\partial \bar{\omega}_z}{\partial r} + \varrho \Omega^2 \bar{v}_{\text{sym},n} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\left\{ \bar{w}_{\text{sym}} \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (5.9a)$$

mit

$$\Delta = \frac{\bar{u}_{\text{sym},n}}{r} + \frac{\partial \bar{u}_{\text{sym},n}}{\partial r} - n \cdot \frac{\bar{v}_{\text{sym},n}}{r} + \frac{\partial \bar{w}_{\text{sym},n}}{\partial z} \quad (5.10a)$$

$$\bar{\omega}_r = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{r} \cdot \bar{w}_{\text{sym},n} - \frac{\partial \bar{v}_{\text{sym},n}}{\partial z} \right) \quad (5.10b)$$

$$\bar{\omega}_\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_{\text{sym},n}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}_{\text{sym},n}}{\partial r} \right) \quad (5.10c)$$

$$\bar{\omega}_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(r \bar{v}_{\text{sym},n})}{\partial r} - n \cdot \bar{u}_{\text{sym},n} \right) \quad (5.10d)$$

Das Differentialgleichungssystem (5.9) ist unabhängig vom Öffnungswinkel φ des Koordinatensystems und gilt sowohl für die symmetrischen wie auch mit $\{\bar{u}_{\text{ant},n}\}$ anstelle von $\{\bar{u}_{\text{sym},n}\}$ für die antimetrischen Fourierterme.

Die allgemeine Lösung $\{\bar{u}_{\text{sym},n}\}$ bzw. $\{\bar{u}_{\text{ant},n}\}$ dieses Gleichungssystems läßt sich als Produkt der nur von der Koordinate r abhängigen Matrix $\left[\underline{H}_\nu \right]$ und dem ausschließlich von der Höhenkoordinate z abhängigen Vektor $\{\underline{F}_\nu\}$ anschreiben:

$$\left\{ \bar{u}_{\text{sym},n} \right\} = \sum_{\nu=1}^{n\nu} \underline{a}_{\nu,\text{sym}} \left[\underline{H}_\nu \right] \cdot \left\{ \underline{F}_\nu \right\} \quad (5.11a)$$

$$\left\{ \underline{u}_{\text{ant}, n} \right\} = \sum_{\nu=1}^{n_{\nu}} \underline{a}_{\nu, \text{ant}} \left[\underline{H}_{\nu} \right] \left\{ \underline{F}_{\nu} \right\} \quad (5.11b)$$

$\left[\underline{H}_{\nu} \right]$ und $\left\{ \underline{F}_{\nu} \right\}$ hängen zudem von einem nach freien Parameter \underline{k}_{ν} , der sogenannten "Wellenzahl" (die bei eindimensionalen, ungedämpften Wellenausbreitungsvorgängen der mit $2 \cdot \pi$ multiplizierten "Wellenlänge" entspricht), ab und sind für jede Wellenzahl voneinander unabhängig. Die gesamte Lösung ist die mit den Beteiligungsfaktoren $\underline{a}_{\nu, \text{sym}}$ bzw. $\underline{a}_{\nu, \text{ant}}$ gewichtete Summe aller insgesamt n_{ν} Teillösungen. Die Matrix $\left[\underline{H}_{\nu} \right]$, die die Ortsabhängigkeit der Lösung von r beschreibt, erhält man nach /28/ und /2/ zu:

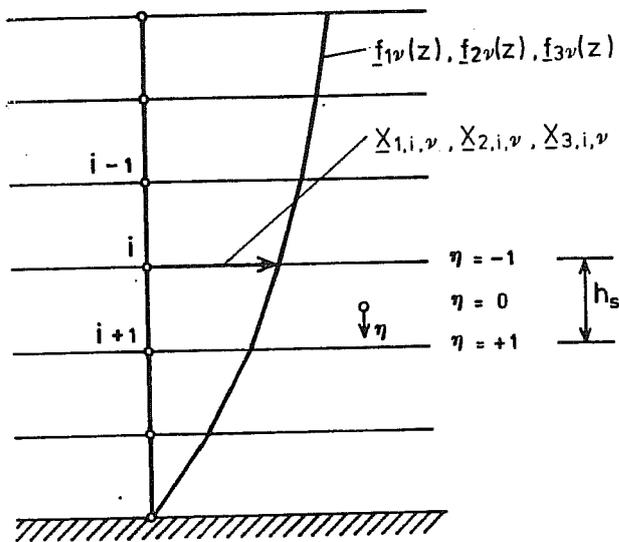
$$\left[\underline{H}_{\nu} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{H}_{-n}(\underline{k}_{\nu}, r)}{\partial r} & 0 & \frac{n}{r} \cdot \underline{H}_{-n}(\underline{k}_{\nu}, r) \\ 0 & \underline{k}_{\nu} \cdot \underline{H}_{-n}(\underline{k}_{\nu}, r) & 0 \\ \frac{n}{r} \cdot \underline{H}_{-n}(\underline{k}_{\nu}, r) & 0 & \frac{\partial \underline{H}_{-n}(\underline{k}_{\nu}, r)}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Die Funktionen $\underline{H}_{-n}(\underline{k}_{\nu}, r)$ sind Hankelfunktionen der zweiten Art von der Ordnung n . Entsprechende Lösungen mit Hankelfunktionen der ersten Art werden hier nicht berücksichtigt, da diese zusammen mit dem die Zeitabhängigkeit beschreibenden Faktor $e^{i \Omega t}$ (Gl. (2.4)) Wellen entsprechen, die vom Unendlichen in den Ursprung des Koordinatensystems laufen und für ein Randelement physikalisch nicht sinnvoll sind.

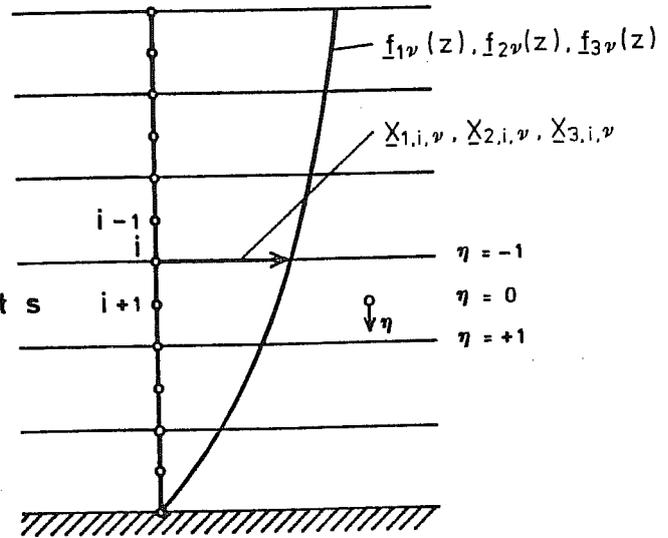
Die Abhängigkeit der Verschiebungen von der Höhenkoordinate z wird durch den Vektor

$$\left\{ \underline{F}_{\nu} \right\} = \begin{Bmatrix} f_{-1, \nu}(z) \\ f_{-2, \nu}(z) \\ f_{-3, \nu}(z) \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

lineare Ansatzfunktion



quadratische Ansatzfunktion

Bild 7: Ansatzfunktionen für die Funktionen $f_{1,\nu}$, $f_{2,\nu}$, $f_{3,\nu}$

Die Matrix $[N_\eta]$ hat bei linearer Ansatzfunktion die Form:

$$[N_\eta] = [g_1 \cdot [I_3], g_2 \cdot [I_3]] \quad (5.16)$$

$$g_1 = \frac{1}{2} (1-\eta) \quad g_2 = \frac{1}{2} (1+\eta)$$

$$[I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.16a)$$

Bei quadratischer Ansatzfunktion gilt:

$$[N_\eta] = [g_1 \cdot [I_3], g_2 \cdot [I_3], g_3 \cdot [I_3]] \quad (5.17)$$

$$g_1 = \frac{1}{2} \eta (\eta-1) \quad g_2 = 1-\eta^2 \quad g_3 = \frac{1}{2} \eta (\eta+1)$$

Die Beschreibung des Verschiebungsfeldes in z- und r-Richtung erhält man mit Gl. (5.11) und (5.14) zu:

$$\left\{ \bar{u}_{\text{sym},n} \right\} = \sum_{\nu=1}^{n_{\nu}} \underline{a}_{\nu, \text{sym}} \cdot \left[\underline{H}_{\nu} \right] \cdot \left[N_{\eta} \right] \cdot \left\{ X_{s\nu} \right\} \quad (5.18a)$$

$$\left\{ \bar{u}_{\text{ant},n} \right\} = \sum_{\nu=1}^{n_{\nu}} \underline{a}_{\nu, \text{ant}} \cdot \left[\underline{H}_{\nu} \right] \cdot \left[N_{\eta} \right] \cdot \left\{ X_{s\nu} \right\} \quad (5.18b)$$

Insbesondere sind die Verschiebungen eines Punkts i am Rand gegeben durch

$$\left\{ \bar{u}_{\text{sym},n,i} \right\} = \sum_{\nu=1}^{n_{\nu}} \underline{a}_{\nu, \text{sym}} \cdot \left[\underline{H}_{\nu} \right] \cdot \left\{ X_{i,\nu} \right\} \quad (5.19a)$$

$$\left\{ \bar{u}_{\text{ant},n,i} \right\} = \sum_{\nu=1}^{n_{\nu}} \underline{a}_{\nu, \text{ant}} \cdot \left[\underline{H}_{\nu} \right] \cdot \left\{ X_{i,\nu} \right\} \quad (5.19b)$$

und die Verschiebungen am Rand lassen sich durch die Knotenpunktverschiebungen ausdrücken zu:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{u}_{\text{sym},n} \right\} &= \left[N_{\eta} \right] \cdot \left\{ \bar{u}_{s, \text{sym}} \right\} \\ \left\{ \bar{u}_{\text{ant},n} \right\} &= \left[N_{\eta} \right] \cdot \left\{ \bar{u}_{s, \text{ant}} \right\} \end{aligned} \quad (5.20)$$

wobei

$$\left\{ \bar{u}_{s, \text{sym}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \bar{u}_{\text{sym},n,i} \right\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left\{ \bar{u}_{\text{sym},n,i+j} \right\} \end{array} \right\} \quad (5.21)$$

$$\left\{ \bar{u}_{s, \text{ant}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \bar{u}_{\text{ant}, n, i} \right\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left\{ \bar{u}_{\text{ant}, n, i+j} \right\} \end{array} \right\} \quad (5.22)$$

die Vektoren der Fourierterme der Knotenpunktverschiebungen nach Gl. (5.19) am Rand für jeweils eine Schicht s sind. Dieses Verschiebungsfeld ist mit demjenigen der Elemente des diskretisierten Bereichs verträglich, wenn in beiden Fällen dieselben Ansatzfunktionen in z -Richtung, d.h. stückweise lineare bzw. quadratische Funktionen, für die Verschiebungen gewählt werden.

Durch die Gleichungen (5.1) und (5.18) wird das vollständige Verschiebungsfeld in Abhängigkeit von den Knotenpunktwerten $\bar{X}_{i, j, \nu}$ der Funktionen $\bar{f}_{j, \nu}$ sowie den noch freien Wellenzahlen \bar{k}_{ν} beschrieben. Das dazugehörige Dehnungsfeld erhält man mit Gl. (2.23). Damit lassen sich die Dehnungen an einer beliebigen Stelle innerhalb einer Schicht durch die Knotenpunktwerte $\bar{X}_{i, j, \nu}$ der Funktionen $\bar{f}_{j, \nu}$ ausdrücken in der Form:

$$\left\{ \bar{\varepsilon}_{\text{sym}, n} \right\} = \sum_{\nu=1}^{n_{\nu}} \underline{a}_{\nu, \text{sym}} \cdot \left[\underline{B}_k \right] \cdot \left\{ \bar{X}_{s\nu} \right\} \quad (5.23a)$$

$$\left\{ \bar{\varepsilon}_{\text{ant}, n} \right\} = \sum_{\nu=1}^{n_{\nu}} \underline{a}_{\nu, \text{ant}} \cdot \left[\underline{B}_k \right] \cdot \left\{ \bar{X}_{s\nu} \right\} \quad (5.23b)$$

Die Matrix $\left[\underline{B}_k \right]$ ist in Anhang A angegeben.

Mit dem Dehnungsfeld ist mit Gl. (5.4) auch das Spannungsfeld bekannt:

$$\left\{ \bar{\sigma}_{\text{sym}, n} \right\} = \sum_{\nu=1}^{n_{\nu}} \underline{a}_{\nu, \text{sym}} \cdot \left[\underline{D} \right] \cdot \left[\underline{B}_k \right] \cdot \left\{ \bar{X}_{s\nu} \right\} \quad (5.24a)$$

$$\left\{ \underline{\bar{\sigma}}_{\text{ant},n} \right\} = \sum_{\nu=1}^{n_{\nu}} \underline{\alpha}_{\nu,\text{ant}} \cdot \left[\underline{\underline{D}} \right] \left[\underline{\underline{B}}_k \right] \cdot \left\{ \underline{X}_{s\nu} \right\} \quad (5.24b)$$

5.1.3 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Der Verschiebungsansatz enthält als freie Parameter die Knotenpunktswerte der Funktionen $f_{1,\nu}(z)$, $f_{2,\nu}(z)$, $f_{3,\nu}(z)$, die Wellenzahlen \underline{k}_{ν} sowie die Beteiligungsfaktoren $\underline{\alpha}_{\nu,\text{sym}}$ bzw. $\underline{\alpha}_{\nu,\text{ant}}$. Diese können mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen bestimmt werden. Man verwendet zweckmäßig die Gl. (2.27) entsprechende Formulierung des Prinzips für rotationssymmetrische Strukturen.

Nach Einführung der Fourier-Darstellung Gl. (5.1) und der Entkopplung der einzelnen Fourierterme mit den Orthogonalitätsbeziehungen Gl. (5.7) erhält man diese zu (/2/):

$$\iint_V \left\{ \hat{\underline{u}}_{\text{sym}} \right\}^T \cdot \left\{ \underline{\underline{W}}_{\text{sym}} \right\} \cdot r \cdot dr \cdot dz + \int_A \left\{ \hat{\underline{u}}_{\text{sym}} \right\}^T \left(\left\{ \underline{\underline{P}}_{\text{sym},n} \right\} - \left\{ \underline{\bar{\sigma}}_{n,\text{sym}} \right\} \right) \cdot r \cdot ds = 0 \quad (5.25)$$

Dabei bedeutet $\left\{ \underline{\underline{W}}_{\text{sym}} \right\}$ die linke Seite der Wellengleichung (5.9) für den betrachteten Fourierterm n . Der Spannungsvektor $\left\{ \underline{\bar{\sigma}}_{n,\text{sym}} \right\}$ enthält die Projektion der Fourierkomponenten der Oberflächenspannungen auf einen Einheitsvektor, der jeweils senkrecht zur Fläche steht und $\left\{ \underline{\underline{P}}_{\text{sym},n} \right\}$ enthält die Fourierkomponenten der äußeren Flächenlasten. Das erste Integral erstreckt sich über das Volumen, das zweite Integral auf die Oberfläche des untersuchten Bereiches. Eine analoge Beziehung erhält man für die antisymmetrischen Anteile des Verschiebungsfeldes.

Man untersucht nun einen zylinderförmigen Körper, der durch die Koordinaten $r = r_0$ und $r = r_0 + l$ begrenzt wird und sich aus Schichten der Höhe h_s zusammensetzt (Bild 8). Als Oberflächenkräfte wirken an den beiden vertikalen Rändern die Spannungen $\left\{ \underline{\underline{P}}_0 \right\}$ und $\left\{ \underline{\underline{P}}' \right\}$, die so gewählt werden, daß ihre virtuelle Arbeit gleich

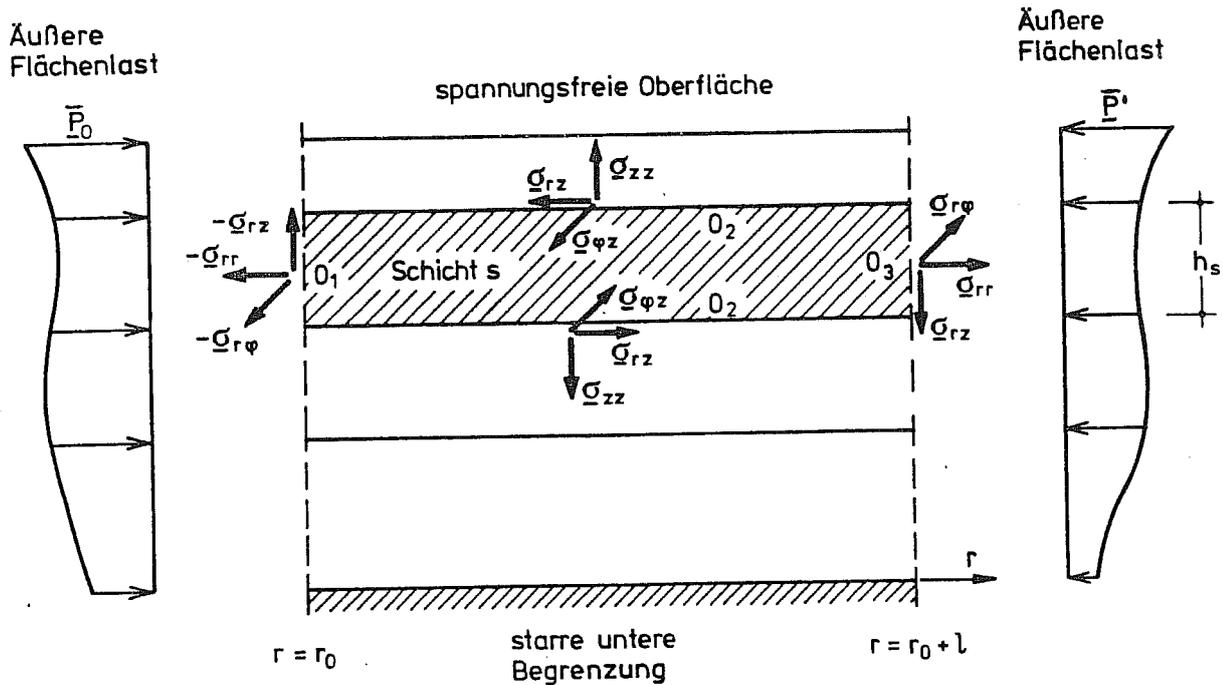


Bild 8: Spannungen an der Oberfläche einer Schicht

derjenigen der auf die Normale projizierten Oberflächenspannungen ist. Daher entfällt bei der Integration über die Oberfläche der Anteil der vertikalen Seitenflächen. Man erhält nun für den gesamten Körper folgendes Gleichungssystem:

$$\sum_{s=1}^{n_s} \left(\iint_V \left\{ \begin{array}{c} \hat{u}_{\text{sym}} \\ \bar{w}_{\text{sym}} \end{array} \right\}^T \cdot \left\{ \begin{array}{c} \bar{w}_{\text{sym}} \\ \bar{u}_{\text{sym}} \end{array} \right\} \cdot r \cdot dr \cdot dz + \int_{o_2} \left\{ \begin{array}{c} \hat{u}_{\text{sym}} \\ \bar{w}_{\text{sym}} \end{array} \right\}^T \cdot \left\{ \begin{array}{c} \bar{\sigma}_{\text{n,sym}} \\ \bar{\sigma}_{\text{t,sym}} \end{array} \right\} r \, ds \right) = 0 \quad (5.26)$$

Die Integration über die Oberfläche bezieht sich auf die horizontalen Ränder "o₂" einer Schicht, die Summation ist für die virtuellen Arbeiten aller insgesamt n_s Schichten durchzuführen.

Weiterhin erhält man die an der vertikalen Seitenfläche "o₁" bei r = r₀ wirkenden Flächenlasten aus der Bedingung

$$\sum_{s=1}^{n_s} \left\{ \hat{\underline{u}}_{s,\text{sym}} \right\}^T \left\{ \bar{\underline{p}}_{s,\text{sym}} \right\} = \sum_{s=1}^{n_s} \int_{o_1} \left\{ \hat{\underline{u}}_{\text{sym}} \right\}^T \cdot \left\{ \bar{\underline{\sigma}}_{n,\text{sym}} \right\} r \cdot dz \quad (5.27)$$

Mit $\left\{ \hat{\underline{u}}_{s,\text{sym}} \right\}$ und $\left\{ \bar{\underline{p}}_{s,\text{sym}} \right\}$ werden die virtuellen Verschiebungen und Knotenkräfte für die Freiheitsgrade der jeweiligen Schicht s am Rand $r = r_o$ bezeichnet. Die Integration erstreckt sich über die gesamte Höhe der Schicht.

5.1.4 Eigenwertproblem der Bodenwellen

Zunächst wird die erste der aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen erhaltenen Gleichungen (Gl. 5.26) weiter behandelt. Dazu setzt man in Gl. (5.26) im Vektor $\left\{ \bar{\underline{w}}_{\text{sym}} \right\}$, Gl. (5.9), die Ansatzfunktionen der Verschiebungen Gl. (5.18) und in den Vektor $\left\{ \bar{\underline{\sigma}}_{n,\text{sym}} \right\}$ die diesen Ansatzfunktionen entsprechenden Spannungen auf der Oberfläche "o₂" ein. Diese erhält man aus den entsprechenden Komponenten des Spannungsvektors Gl. (5.24). Mit den Ansatzfunktionen der Funktionen $f_{j,\nu}$ läßt sich sowohl $\left\{ \bar{\underline{w}}_{\text{sym}} \right\}$ als auch $\left\{ \bar{\underline{\sigma}}_{n,\text{sym}} \right\}$ als Produkt einer Matrix mit dem Vektor $\left\{ \underline{x}_{s,\nu} \right\}$ darstellen. Gleichung (5.26) führt damit zu einem homogenen Gleichungssystem für die Knotenpunktwerte $X_{i,j,\nu}$ der Funktionen $f_{j,\nu}$.

Für die virtuellen Verschiebungen $\left\{ \hat{\underline{u}}_{\text{sym}} \right\}$ wählt man dieselben Ansatzfunktionen wie für die tatsächlichen Verschiebungen. Mit der Bedingung, daß das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für jeden beliebigen virtuellen Verschiebungszustand erfüllt sein muß, lassen sich die virtuellen Verschiebungen aus dem Gleichungssystem eliminieren. Nach einer längeren Umformung, die in /2/ ausführlich wiedergegeben ist, führt Gl. (5.26) zu dem linearen homogenen Gleichungssystem:

$$\left(\left[\tilde{\underline{A}} \right] \cdot \underline{k}_\nu^2 + \left[\tilde{\underline{B}} \right] \cdot \underline{k}_\nu + \left(\left[\tilde{\underline{G}} \right] - \Omega^2 \cdot \left[\tilde{\underline{M}} \right] \right) \right) \cdot \left\{ \underline{x}_\nu \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (5.29)$$

Dieses Gleichungssystem ist unabhängig von der Ordnung n des jeweiligen Fourierterms und für den symmetrischen und antisymmetrischen Verschiebungsanteil gleich. Es besteht aus $3 \cdot n_s \cdot j$ Gleichungen und stellt ein quadratisches Eigenwertproblem mit den Wellenzahlen \underline{k}_ν als Eigenwerten dar. Der Vektor

$$\left\{ \underline{X}_\nu \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \underline{X}_{1,\nu} \right\} \\ \left\{ \underline{X}_{2,\nu} \right\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left\{ \underline{X}_{n_s \cdot j,\nu} \right\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \underline{X}_{1,1,\nu} \\ \underline{X}_{2,1,\nu} \\ \underline{X}_{3,1,\nu} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \underline{X}_{1,2,\nu} \\ \underline{X}_{2,2,\nu} \\ \underline{X}_{3,2,\nu} \end{array} \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(\begin{array}{c} \underline{X}_{1,n_s \cdot j,\nu} \\ \underline{X}_{2,n_s \cdot j,\nu} \\ \underline{X}_{3,n_s \cdot j,\nu} \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad (5.30)$$

enthält alle Knotenpunktwerte der Funktionen $\underline{f}_{1,\nu}$, $\underline{f}_{2,\nu}$, $\underline{f}_{3,\nu}$ am Rand. Die Matrizen $\left[\underline{\tilde{A}} \right]$, $\left[\underline{\tilde{B}} \right]$, $\left[\underline{\tilde{G}} \right]$ und $\left[\underline{\tilde{M}} \right]$ werden durch Addition der entsprechenden Untermatrizen für jede Schicht wie in Bild 9 angegeben gebildet, wobei in jeder Schicht andere baugrunddynamische Kennwerte eingesetzt werden können. In Anhang A sind die Schicht-Untermatrizen zusammengestellt.

Die Lösung des Eigenwertproblems Gl. (5.29) führt zu insgesamt $6 \cdot n_s \cdot j$ Eigenwerten \underline{k}_ν und Eigenformen $\left\{ \underline{X}_\nu \right\}$. Davon sind die Hälfte in Verbindung mit dem zeitabhängigen Faktor $e^{i\Omega t}$ Wellen, die sich in radialer Richtung ausbreiten und die andere Hälfte Wellen, die sich vom Unendlichen auf den Nullpunkt hin bewegen. Die letzteren müssen vernachlässigt werden. Dies erreicht man, indem man bei komplexen Wellenzahlen nur diejenigen mit negativem Imaginärteil und bei reellen Wellenzahlen nur diejenigen mit positivem Realteil weiter verwendet /1/. Demnach ist die Summation

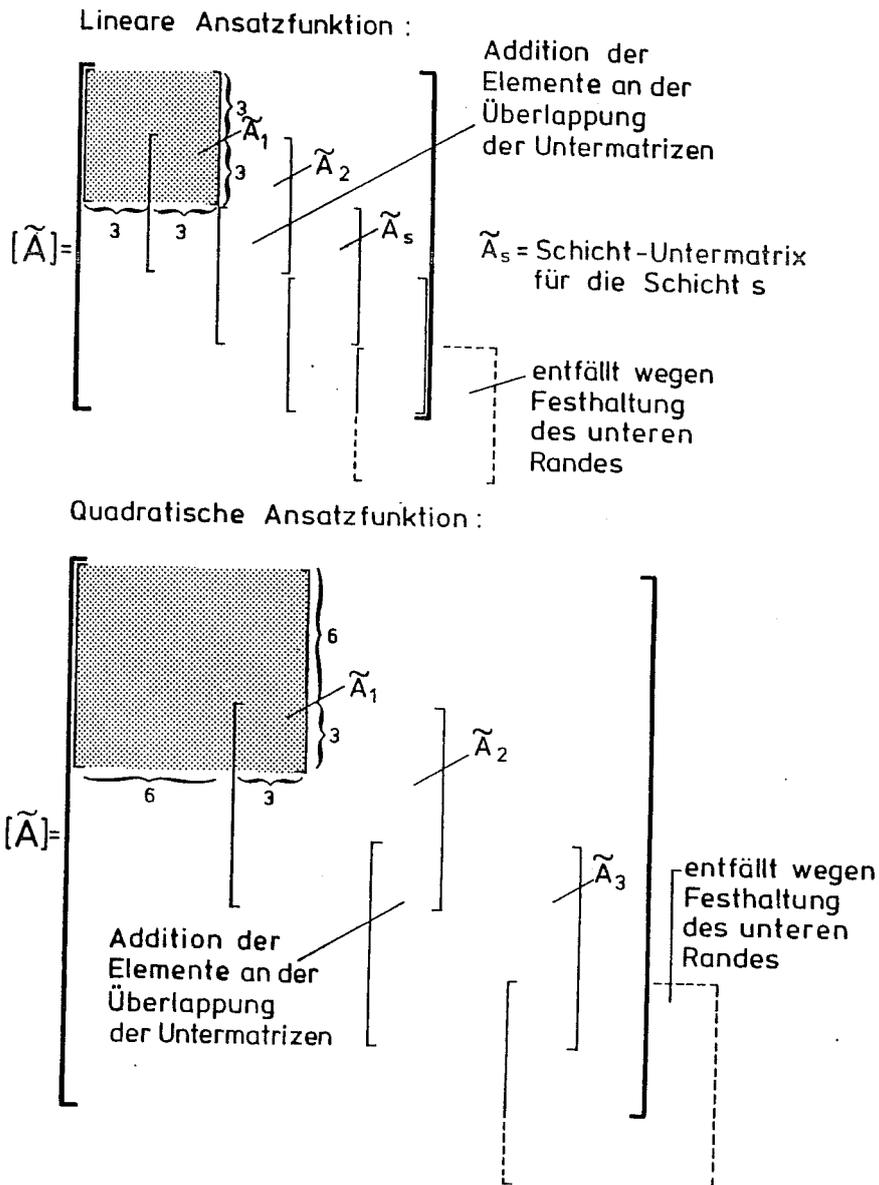


Bild 9: Schema für die Addition der Schicht-Untermatrizen

z.B. in Gl. (5.18) über insgesamt

$$n_{\nu} = 3 \cdot n_s \cdot j \quad (5.31)$$

Eigenformen $\{ \underline{X}_{\nu} \}$ durchzuführen.

Die Beteiligung der einzelnen Eigenformen am resultierenden Verschie-

bungsfeld hängt von der Verschiebung des Randes bei $r = r_0$ ab. Somit lassen sich die Beteiligungsfaktoren $\underline{a}_{\nu, \text{sym}}$ bzw. $\underline{a}_{\nu, \text{ant}}$ durch die Verschiebungen $\{\underline{u}_{0, \text{sym}}\}$ bzw. $\{\underline{u}_{0, \text{ant}}\}$ des Randes ausdrücken. Die Verschiebungen eines einzelnen Punktes i am Rand wurden bereits in Gl. (5.19) zu

$$\left\{ \underline{\bar{u}}_{\text{sym}, n, i} \right\} = \sum_{\nu=1}^{n_\nu} \underline{a}_{\nu, \text{sym}} \cdot \left[\underline{H}_\nu \right] \cdot \left\{ X_{i, \nu} \right\} \quad (5.19)$$

($\{\underline{\bar{u}}_{\text{ant}, n, i}\}$ entsprechend) angeschrieben. Bei jedem Summenglied sind in der Matrix $\left[\underline{H}_\nu \right]$ die Wellenzahl \underline{k}_ν der ν -ten Eigenform und im Vektor $\{X_{i, \nu}\}$ die Komponenten des zugehörigen ν -ten Eigenvektors $\{X_\nu\}$ einzusetzen (Gl. 5.30). Der Radius r in der Matrix $\left[\underline{H}_\nu \right]$ ist der Radius r_0 des Randes. Wendet man nun Gl. (5.19) auf alle Punkte des Randes an, so läßt sich das resultierende Gleichungssystem schreiben:

$$\left\{ \underline{\bar{u}}_{0, \text{sym}} \right\} = \left[\underline{W} \right] \cdot \left\{ \underline{\Gamma}_{\text{sym}} \right\} \quad (5.32)$$

Der Vektor

$$\left\{ \underline{\bar{u}}_{0, \text{sym}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \underline{\bar{u}}_{\text{sym}, n, 1} \right\} \\ \left\{ \underline{\bar{u}}_{\text{sym}, n, 2} \right\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left\{ \underline{\bar{u}}_{\text{sym}, n, n_s \cdot j} \right\} \end{array} \right\} \quad (5.33)$$

($\{\underline{\bar{u}}_{0, \text{ant}}\}$ entsprechend) enthält alle Knotenpunktverschiebungen am Rand, der Vektor

$$\left\{ \underline{\Gamma}_{\text{sym}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{a}_{1, \text{sym}} \\ \underline{a}_{2, \text{sym}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{a}_{3 \cdot n_s \cdot j, \text{sym}} \end{array} \right\} \quad (5.34)$$

($\{\Gamma_{\text{ant}}\}$ entsprechend) alle Beteiligungsfaktoren. Die Matrix \underline{W} setzt sich aus den Untermatrizen $\underline{W}_{i,\nu}$ zusammen:

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \underline{W}_{1,1} & \underline{W}_{1,2} & \cdots & \underline{W}_{1,3 \cdot n_s \cdot j} \\ \underline{W}_{2,1} & \underline{W}_{2,2} & & \underline{W}_{2,3 \cdot n_s \cdot j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{W}_{n_s \cdot j,1} & \underline{W}_{n_s \cdot j,2} & & \underline{W}_{n_s \cdot j,3 \cdot n_s \cdot j} \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$\underline{W}_{i,\nu} = \begin{bmatrix} \underline{X}_{1,i,\nu} \cdot \frac{\partial \underline{H}_n(\underline{k}_\nu \cdot \underline{r}_o)}{\partial r} + \underline{X}_{3,i,\nu} \cdot \frac{n}{r_o} \cdot \underline{H}_n(\underline{k}_\nu \cdot \underline{r}_o) \\ \underline{X}_{2,i,\nu} \cdot \underline{k}_\nu \cdot \underline{H}_n(\underline{k}_\nu \cdot \underline{r}_o) \\ \underline{X}_{1,i,\nu} \cdot \frac{n}{r_o} \cdot \underline{H}_n(\underline{k}_\nu \cdot \underline{r}_o) + \underline{X}_{3,i,\nu} \cdot \frac{\partial \underline{H}(\underline{k}_\nu \cdot \underline{r}_o)}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Um nun die Beteiligungsfaktoren durch die Knotenpunktverschiebungen des Randes auszudrücken, muß man die Matrix \underline{W} invertieren. Mit Gl. (5.32) erhält man dann die Beteiligungsfaktoren zu:

$$\left\{ \underline{\Gamma}_{\text{sym}} \right\} = \underline{W}^{-1} \left\{ \underline{\bar{u}}_{o,\text{sym}} \right\} \quad (5.37a)$$

$$\left\{ \underline{\Gamma}_{\text{ant}} \right\} = \underline{W}^{-1} \left\{ \underline{\bar{u}}_{o,\text{ant}} \right\} \quad (5.37b)$$

5.1.5 Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix des Randlements stellt die Beziehung zwischen dem Vektor $\{\underline{\bar{u}}_{o,\text{sym}}\}$ bzw. $\{\underline{\bar{u}}_{o,\text{ant}}\}$ der Knotenpunktverschiebungen des Randes und dem Vektor der zugehörigen Knotenpunktkräfte $\{\underline{\bar{P}}_{o,\text{sym}}\}$ bzw. $\{\underline{\bar{P}}_{o,\text{ant}}\}$ her. Zu ihrer Ermittlung geht man von

der zweiten, aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen erhaltenen Gleichung, Gl. (5.27) aus. Für das virtuelle Verschiebungsfeld am Rand wählt man dieselben Ansatzfunktionen wie für das tatsächliche Verschiebungsfeld, also nach Gl. (5.20):

$$\left\{ \hat{\underline{u}}_{\text{sym}} \right\}^T = \left\{ \hat{\underline{u}}_{\text{o,sym}} \right\}^T \cdot \left[N_{\eta} \right]^T \quad (5.38)$$

Damit lautet das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, Gl. (5.27):

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n_s} \left\{ \hat{\underline{u}}_{\text{o,sym}} \right\}^T \cdot \left\{ \bar{\underline{p}}_{\text{s,sym}} \right\} \\ = \sum_{s=1}^{n_s} \left\{ \hat{\underline{u}}_{\text{o,sym}} \right\}^T \cdot \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left[N_{\eta} \right]^T \cdot \left\{ \bar{\underline{\sigma}}_{\text{n,sym}} \right\} \cdot \underline{r} \cdot dz \end{aligned} \quad (5.39)$$

Aus der Bedingung, daß diese Beziehung für jeden beliebigen Vektor $\left\{ \hat{\underline{u}}_{\text{o,sym}} \right\}$ der virtuellen Verschiebungen gültig sein muß, folgt aus Gl. (5.39):

$$\sum_{s=1}^{n_s} \left\{ \bar{\underline{p}}_{\text{s,sym}} \right\} = \sum_{s=1}^{n_s} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left[N_{\eta} \right]^T \cdot \left\{ \bar{\underline{\sigma}}_{\text{n,sym}} \right\} \cdot \underline{r} \cdot dz \quad (5.40)$$

Der Vektor $\left\{ \bar{\underline{\sigma}}_{\text{n,sym}} \right\}$ enthält die Fourierkomponenten der Spannungen am vertikalen Rand bei $r = r_o$, bezogen auf die Flächennormale (Bild 8). Für diese Spannungen werden nun die mit den Ansatzfunktionen nach Gl. (5.24) bestimmten inneren Spannungen eingesetzt. Die Eigenvektoren $\left\{ \underline{X}_{\text{s},\nu} \right\}$ in Gl. (5.24) wurden bereits durch Lösung des Eigenwertproblems Gl. (5.29) bestimmt. In der Matrix $\left[B_k \right]$ ist der Radius r_o einzusetzen. Die dimensionslose Koordinate η entspricht der Koordinate in vertikaler Richtung (Bild 7), über die in Gl. (5.40) zu integrieren ist. Ersetzt man nun noch die Beteiligungsfaktoren $\underline{a}_{\nu,\text{sym}}$ mit Gl. (5.37) durch die Knotenpunktverschiebungen des Randes, so erhält man aus Gl. (5.40) eine lineare Beziehung zwischen den Knotenpunktskräften und -verschiebungen des Randes in der Form:

Die Matrizen $\underline{\Psi}$ und $\underline{\Phi}$ werden aus Untermatrizen $\underline{\Psi}_{i,\nu}$, $\underline{\Phi}_{i,\nu}$ aufgebaut:

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_{1,1} & \underline{\Psi}_{1,2} & \dots & \underline{\Psi}_{1,3 \cdot n_s \cdot j} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_{2,1} & \underline{\Psi}_{2,2} & & \underline{\Psi}_{2,3 \cdot n_s \cdot j} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_{i,1} & \underline{\Psi}_{i,2} & & \underline{\Psi}_{i,3 \cdot n_s \cdot j} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_{n_s \cdot j_0,1} & \underline{\Psi}_{n_s \cdot j_0,1} & & \underline{\Psi}_{n_s \cdot j_0,3 \cdot n_s \cdot j} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_{1,1} & \underline{\Phi}_{1,2} & \dots & \underline{\Phi}_{1,3 \cdot n_s \cdot j} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_{2,1} & \underline{\Phi}_{2,2} & & \underline{\Phi}_{2,3 \cdot n_s \cdot j} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_{i,1} & \underline{\Phi}_{i,2} & & \underline{\Phi}_{i,3 \cdot n_s \cdot j} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_{n_s \cdot j,1} & \underline{\Phi}_{n_s \cdot j,2} & & \underline{\Phi}_{n_s \cdot j,3 \cdot n_s \cdot j} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$\underline{\Psi}_{i,\nu} = \begin{bmatrix} H_n(\underline{k}_\nu \cdot \underline{r}_0) \cdot \underline{X}_{1,i,\nu} \\ -H_{n-1}(\underline{k}_\nu \cdot \underline{r}_0) \cdot \underline{X}_{2,i,\nu} \\ H_n(\underline{k}_\nu \cdot \underline{r}_0) \cdot \underline{X}_{3,i,\nu} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$\underline{\Phi}_{i,\nu} = \begin{bmatrix} -H_{n-1}(\underline{k}_\nu \cdot \underline{r}_0) \cdot \underline{X}_{1,i,\nu} \\ H_n(\underline{k}_\nu \cdot \underline{r}_0) \cdot \underline{X}_{2,i,\nu} \\ -H_{n-1}(\underline{k}_\nu \cdot \underline{r}_0) \cdot \underline{X}_{3,i,\nu} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

5.1.6 Verschiebungen, Verzerrungen und Spannung im Randelement

Sind die Verschiebungen des Randes aus dem Ergebnis einer Finite-Element-Berechnung bekannt, so kann man damit die Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen an jedem Punkt des Randelementes bestimmen. Dazu ermittelt man zunächst für die gegebenen Randverschiebungen $\{\bar{u}_{0,sym}\}$ bzw. $\{\bar{u}_{0,ant}\}$ die Beteiligungsfaktoren $\underline{a}_{\nu,sym}$, $\underline{a}_{\nu,ant}$ mit Gl. (5.37). Damit kann man schichtweise aus Gl. (5.18), (5.23), (5.24) die Fourierterme der Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen an jedem Punkt innerhalb der jeweiligen Schicht ermitteln. Die tatsächlichen Größen erhält man dann durch Addition der Anteile aller untersuchten Fourierterme mit den Gleichungen (5.1), (5.2) bzw. (5.3).

5.2 Randelement für nicht rotationssymmetrische Systeme

5.2.1 Allgemeines

Die Steifigkeitsmatrix $\left[\bar{\underline{R}}\right]$ in Gl. (5.41) kann zur Berechnung dreidimensionaler rotationssymmetrischer Strukturen direkt verwendet werden. Man entwickelt dann auch bei den Finiten Elementen des Innenbereichs die Verschiebungen und Kräfte in eine Fourierreihe und erhält für jede Ordnung n ein Gleichungssystem analog Gl. (3.10) für die Fourierterme der Verschiebungen und der Kräfte /41/.

Bei Finite-Element-Modellen nicht rotationssymmetrischer Strukturen wird das Verschiebungsfeld nicht in eine Fourierreihe entwickelt. Vielmehr werden die Verschiebungen nach Bild 1 in kartesischen Koordinaten beschrieben. Die Modellabbildung soll mit dreidimensionalen isoparametrischen Elementen erfolgen, die durch horizontale und vertikale Linien begrenzt werden. Im Folgenden wird gezeigt, wie man durch Transformation der Matrix $\left[\bar{\underline{R}}\right]$ eine Steifigkeitsmatrix des Randelementes erhält, die zur Berechnung derartiger dreidimensionaler Finite-Element-Modelle mit zylinderförmigem Rand geeignet ist. Zur Formulierung der Transformationsmatrizen stehen zwei Bedingungen zur Verfügung: Einmal müssen das Verschiebungsfeld, das im diskretisierten Bereich durch die Verschiebungen der Knoten-

punkte des Randes und durch die Ansatzfunktionen der Finiten Elemente beschrieben wird, und das Verschiebungsfeld des Randelementes übereinstimmen. Weiterhin müssen die am Randelement wirkenden Spannungen den Knotenpunktskräften im diskretisierten Finite-Element-Bereich entsprechen. Mit diesen beiden Bedingungen können die Transformationsmatrizen formuliert werden.

Zuvor wird noch die Verträglichkeit der Elemente des diskretisierten Bereichs mit dem Randelement untersucht.

5.2.2 Kompatibilität mit anderen Elementtypen

Die Verwendung unterschiedlicher Elementtypen in einem einzigen Finite-Element-Modell ist dann ohne Fehler möglich, wenn die einzelnen Elemente miteinander kompatibel sind. Die Kompatibilität bedeutet, daß sowohl die Elementgeometrie als auch das Verschiebungsfeld benachbarter Elemente an den gemeinsamen Flächen oder Kanten übereinstimmen.

Zunächst soll die geometrische Kompatibilität der Elemente des diskretisierten Bereichs mit dem zylinderförmigen Randelement untersucht werden. Elemente, die mit dem Randelement kompatibel sind, müssen ebenfalls einen zylinderförmigen Rand - an zumindest einer Elementfläche - aufweisen. Diese Bedingung wird von den Sektorelementen SECT 9, SECT 18 und SECT 30 nach /29/ erfüllt. Die Elemente sind zur Berechnung rotationssymmetrischer Strukturen mit nicht-rotationssymmetrischen Materialeigenschaften geeignet. Zur Darstellung beliebiger Strukturen sind sie wegen der vorgegebenen Sektorenform nur sehr bedingt brauchbar.

Eine sehr gute Anpassung des Finite-Element-Modells an eine vorgegebene Struktur ermöglichen dagegen die dreidimensionalen, isoparametrischen Elemente mit quadratischer Ansatzfunktion (Bild 4). Jedoch ist bei diesen Elementen die Erfüllung der geometrischen Kompatibilität nicht mehr exakt möglich (Bild 10). Als Maß zur Abschätzung des dadurch entstehenden Fehlers kann man den Ab-

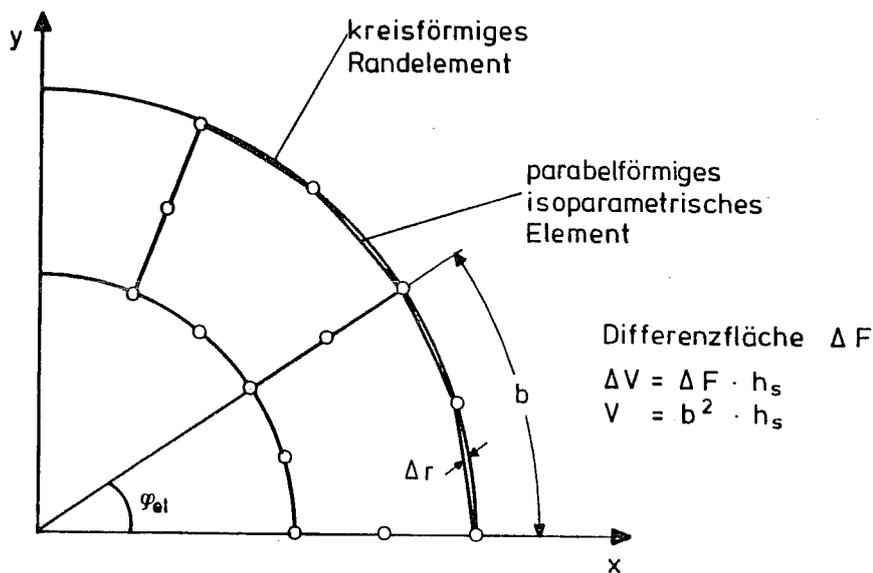


Bild 10: Abstand des Randelementes von den Elementen im Innenbereich

stand zwischen Finitem Element und Randelement Δr auf die Elementlänge b (Länge des Bogens) beziehen. Eine andere Möglichkeit ist, den bei der Integration zur Ermittlung der Steifigkeitsmatrix, Gl. (3.6), "fehlenden" Volumenanteil ΔV auf das Gesamtvolumen V des Elementes zu beziehen, wobei von einem Element der Höhe h_s und mit der Grundfläche $b \times b$ ausgegangen wird. Die Ermittlung der erforderlichen geometrischen Beziehungen ist in Anhang B angegeben. Bild 11 zeigt in logarithmischem Maßstab die daraus errechneten Faktoren $\Delta r/b$ und $\Delta V/V$ in Abhängigkeit vom zugrundegelegten Öffnungswinkel φ_{el} bzw. der Anzahl n_e von Elementen entlang des kreisförmigen Randes in einer Schicht. Man erkennt, daß bei Verwendung von z.B. 10 Elementen der größte Abstand zwischen Rand und Element etwa 0,5% der Kantenlänge des Elementes beträgt. Die bezogene Volumendifferenz ist demgegenüber noch geringer. Mit zunehmender Anzahl von Elementen nimmt der Fehler rasch ab. Man muß dabei berücksichtigen, daß eine Finite-Element-Lösung immer eine Näherungsberechnung darstellt und nur eine endliche Genauigkeit besitzt. Fehler in der genannten Größenordnung treten auch an anderen Stellen der Berechnung, z.B. bei der numerischen Integration zur Bestimmung des Steifigkeitsmatrix nach Gl. (3.6) auf

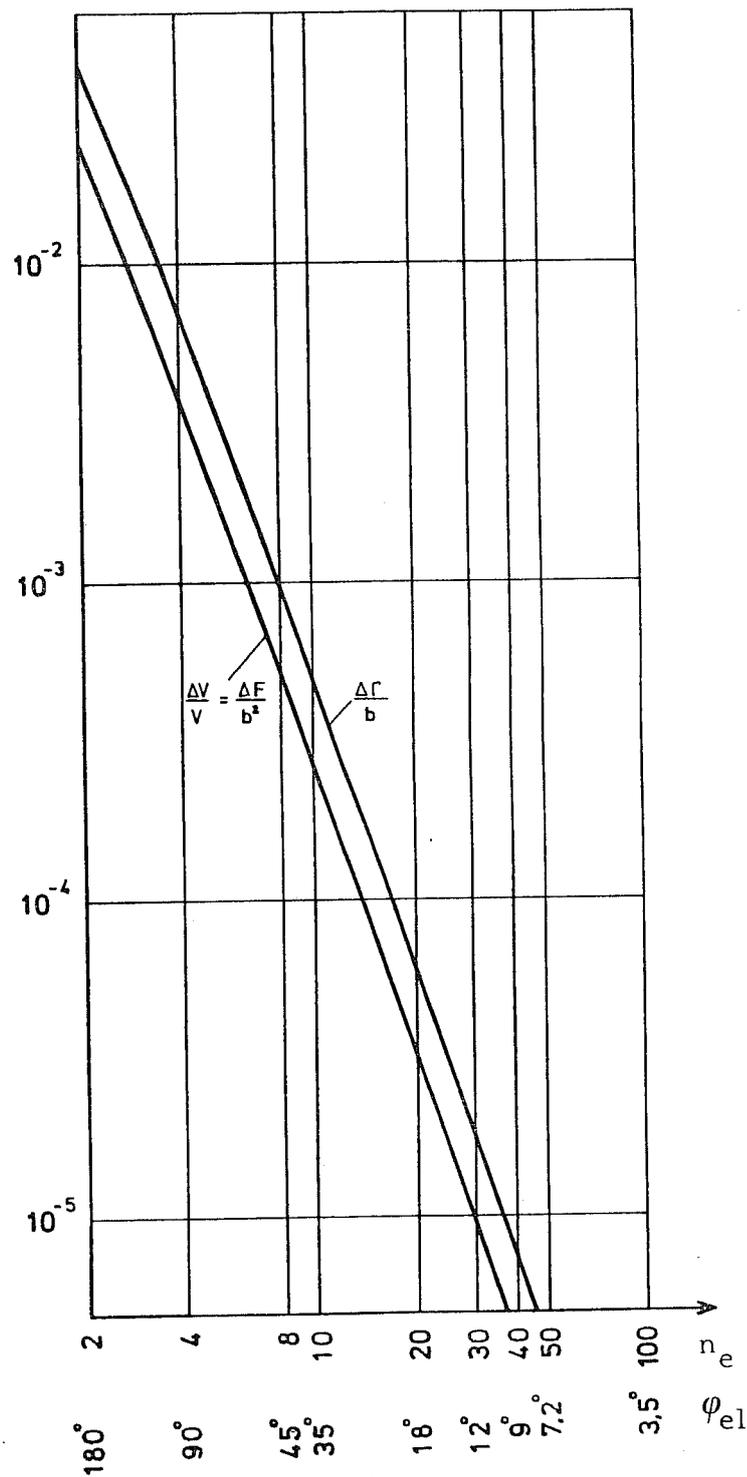


Bild 11: Annäherung eines Kreisbogenabschnitts durch eine Parabel

und können vernachlässigt werden. Daher ist die Konvergenz des Verfahrens praktisch auch dann gegeben, wenn die geometrische Kompatibilitätsbedingung nicht exakt erfüllt ist.

Neben der geometrischen Kompabilität wird die Verträglichkeit der Verschiebungen gefordert. Diese Bedingung wird beim Aufstellen der Transformationsmatrizen für die Steifigkeitsmatrix berücksichtigt.

5.2.3 Transformation der Randverschiebungen

Durch die Transformationsgleichungen der Verschiebungen werden die Fourierterme der Verschiebungen des Randes durch ein allgemeines Verschiebungsfeld des Randes ausgedrückt. Dieses wird durch die Knotenpunktverschiebungen und zwischen den Knotenpunkten durch die Ansatzfunktionen der im diskretisierten Bereich verwendeten Finiten Elemente beschrieben.

Zur Herleitung der Beziehung geht man von Gl. (5.6a), (5.6b) aus. Zunächst werden die Verschiebungen $\{ \underline{u}_z \}$ in Zylinderkoordinaten mit einer Koordinatentransformation durch Verschiebungen in kartesischen Koordinaten (Bild 1) ausgedrückt. Zwischen den Verschiebungen in kartesischen Koordinaten und den Knotenpunktverschiebungen am zylinderförmigen Rand besteht über die Ansatzfunktionen ein linearer Zusammenhang. Damit erhält man einen linearen Zusammenhang zwischen den Knotenpunktverschiebungen des dreidimensionalen Randes und den Fouriertermen der Verschiebung. Diese Beziehungen sollen nun im einzelnen abgeleitet werden.

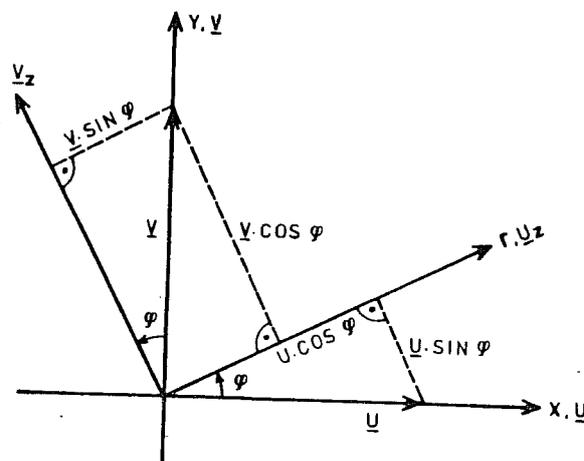


Bild 12: Koordinatentransformation der Verschiebungen

Zwischen den Verschiebungen im kartesischen Koordinatensystem (Bild 1) und im zylindrischen Koordinatensystem (Bild 2) besteht nach Bild 12 die Beziehung:

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_z \\ \underline{w}_z \\ \underline{v}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

$$\left\{ \underline{u}_z \right\} = \left[T \right] \cdot \left\{ \underline{u} \right\} \quad (5.48a)$$

Die Fouriерterme der Verschiebungen des Randes für ein allgemeines Verschiebungsfeld in kartesischen Koordinaten erhält man durch Einsetzen in Gl. (5.6a), (5.6b) zu

$$\left\{ \underline{u}_{\text{sym},n} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{no} \right) \cdot \int_0^{2\pi} \left[\Phi_{\text{sym},n} \right] \cdot \left[T \right] \cdot \left\{ \underline{u} \right\} \cdot d\varphi \quad (5.49a)$$

$$\left\{ \underline{u}_{\text{ant},n} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{no} \right) \cdot \int_0^{2\pi} \left[\Phi_{\text{ant},n} \right] \cdot \left[T \right] \cdot \left\{ \underline{u} \right\} \cdot d\varphi \quad (5.49b)$$

Das Verschiebungsfeld $\left\{ \underline{u} \right\}$ wird für eine einzelne Bodenschicht durch die Ansatzfunktionen der Finiten Elemente in Gl. (3.1) bzw. Gl. (3.12) und Bild 4 definiert. Bezeichnet man die Winkelkoordinaten an den Elementgrenzen mit $\varphi = \varphi_0, \varphi_1, \varphi_{n_e-1}$, wobei $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_{n_e-1} = 2 \cdot \pi$ ist (Bild 13), ergibt sich weiter:

$$\left\{ \underline{u}_{\text{sym},n} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{no} \right) \cdot \sum_{i=0}^{n_e-1} \left(\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left[\Phi_{\text{sym},n} \right] \cdot \left[T \right] \cdot \left[N \right] \cdot d\varphi \right) \cdot \left\{ \underline{u}_{e0} \right\} \quad (5.50a)$$

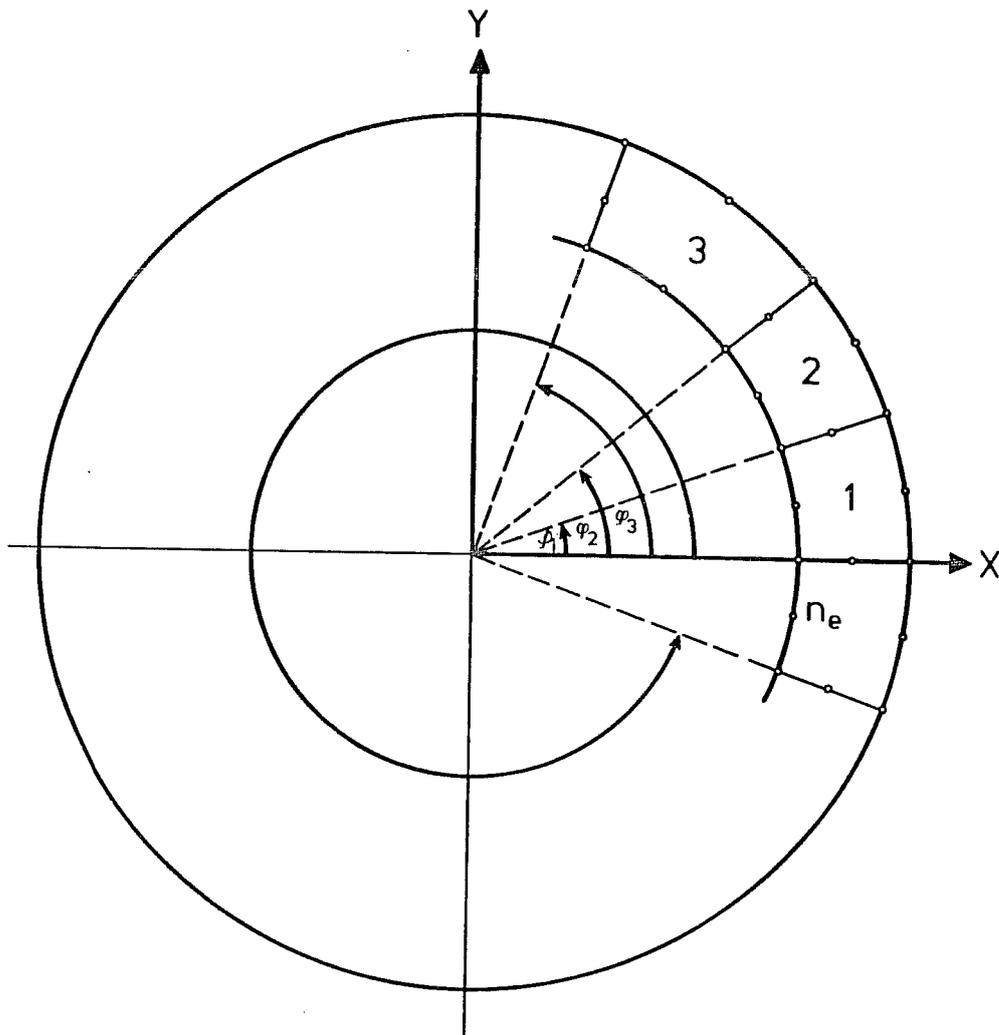


Bild 13: Draufsicht auf Elemente am Rand

$$\left\{ \bar{\underline{u}}_{\text{ant},n} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{n0} \right) \cdot \sum_{i=0}^{n_e-1} \left(\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left[\Phi_{\text{ant},n} \right] \cdot \left[T \right] \cdot \left[N \right] \cdot d\varphi \right) \cdot \left\{ \underline{u}_{\text{eo}} \right\} \quad (5.50b)$$

Die Matrix $\left[N \right]$ enthält die Ansatzfunktionen und der Vektor $\left\{ \underline{u}_{\text{eo}} \right\}$ die Verschiebungen \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} aller Knoten eines Elements, die mit dem Randelement am zylinderförmigen Rand verbunden sind.

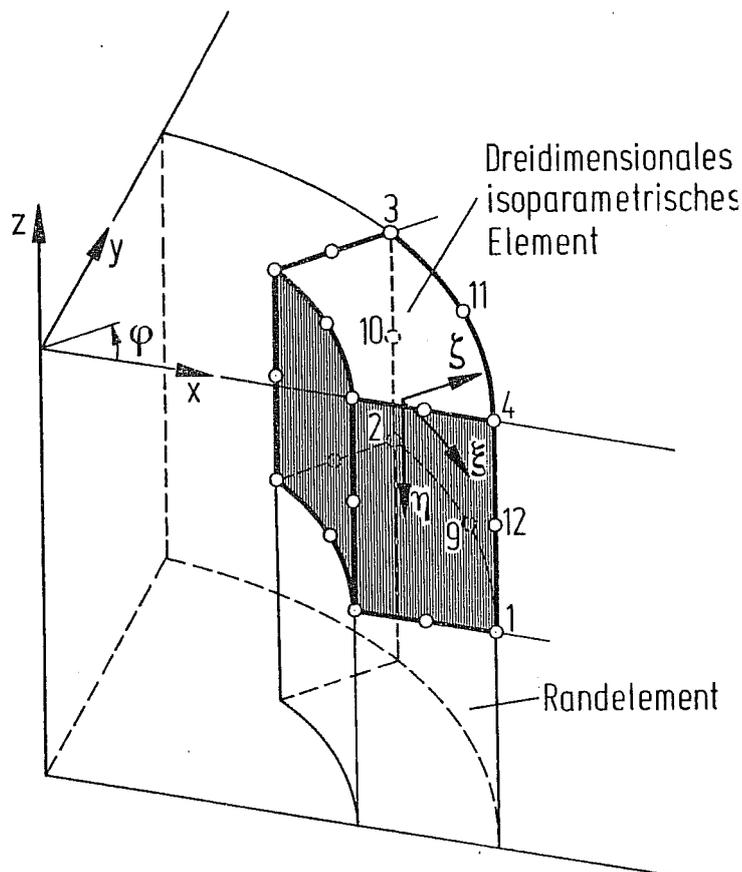


Bild 14: Anordnung eines dreidimensionalen Elements am Rand

Ein dreidimensionales isoparametrisches Element sei, wie in Bild 14 dargestellt, am Rand angeordnet. Das Verschiebungsfeld des Elements in der an den zylinderförmigen Rand angrenzenden Fläche erhält man nach Bild 4 für die Elementkoordinate $\zeta = 1$ zu:

bei linearer Ansatzfunktion über die Höhe:

$$[N] = \left[h_1 \cdot [I_3] \quad h_2 \cdot [I_3] \quad h_3 \cdot [I_3] \quad h_4 \cdot [I_3] \quad h_9 \cdot [I_3] \quad h_{11} \cdot [I_3] \right] \quad (5.51)$$

mit

$$[I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h_1 = \frac{1}{4} \left((\xi + \xi^2) + \eta (\xi + \xi^2) \right),$$

$$h_2 = \frac{1}{4} \left((-\xi + \xi^2) + \eta (-\xi + \xi^2) \right)$$

$$h_3 = \frac{1}{4} ((-\xi + \xi^2) + \eta(\xi - \xi^2))$$

$$h_4 = \frac{1}{4} ((\xi + \xi^2) + \eta(-\xi - \xi^2))$$

$$h_9 = \frac{1}{2} ((1 - \xi^2) + \eta(1 - \xi^2))$$

$$h_{11} = \frac{1}{2} ((1 - \xi^2) + \eta(\xi^2 - 1))$$

sowie bei quadratischer Ansatzfunktion über die Höhe zu:

$$\begin{bmatrix} N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \cdot \begin{bmatrix} I_3 \end{bmatrix}, h_2 \cdot \begin{bmatrix} I_3 \end{bmatrix}, h_3 \cdot \begin{bmatrix} I_3 \end{bmatrix}, h_4 \cdot \begin{bmatrix} I_3 \end{bmatrix}, h_9 \cdot \begin{bmatrix} I_3 \end{bmatrix}, h_{10} \cdot \begin{bmatrix} I_3 \end{bmatrix}, h_{11} \cdot \begin{bmatrix} I_3 \end{bmatrix}, h_{12} \cdot \begin{bmatrix} I_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(5.52)

mit

$$h_1 = \frac{1}{4} ((\xi^2 - 1) + \eta(\xi + \xi^2) + \eta^2(1 + \xi))$$

$$h_2 = \frac{1}{4} ((\xi^2 - 1) + \eta(\xi^2 - \xi) + \eta^2(1 - \xi))$$

$$h_3 = \frac{1}{4} ((\xi^2 - 1) + \eta(\xi - \xi^2) + \eta^2(1 - \xi))$$

$$h_4 = \frac{1}{4} ((\xi^2 - 1) + \eta(-\xi^2 - \xi) + \eta^2(1 + \xi))$$

$$h_9 = \frac{1}{2} ((1 - \xi^2) + \eta(1 - \xi^2))$$

$$h_{10} = \frac{1}{2} ((1 + \xi) + \eta^2(\xi - 1))$$

$$h_{11} = \frac{1}{2} ((1 - \xi^2) + \eta(\xi^2 - 1))$$

$$h_{12} = \frac{1}{2} ((1 + \xi) + \eta^2(-1 - \xi))$$

In der Matrix $\begin{bmatrix} N \end{bmatrix}$ und im Vektor $\{\underline{u}_{e0}\}$ der Knotenpunktverschiebungen sind nur die Verschiebungen derjenigen Punkte enthalten, die in der Berührungsfläche des dreidimensionalen isoparametrischen Elements mit dem zylinderförmigen Rand liegen. Für die übrigen Knotenpunkte des Elements werden die Funktionen h_i in der Fläche $\xi = 1$ (vgl. Bild 14) zu Null und brauchen daher nicht

berücksichtigt zu werden.

Der Vektor $\{\underline{u}_{e0}\}$ enthält demnach ausschließlich die Verschiebungskomponenten \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} in den Elementknotenpunkten 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 und 12 (Bezeichnung siehe Bild 4 und 14).

Die Matrix $[N]$ ist aufspaltbar in die Matrix $[N_\eta]$, die nur von der Elementkoordinate η (entsprechend z im globalen Koordinatensystem) abhängt und in $[N_\xi]$, welche nur von der Elementkoordinate ξ (entsprechend φ im zylindrischen Koordinatensystem) abhängt.

$$[N] = [N_\eta] \cdot [N_\xi] \quad (5.53)$$

Die Matrix $[N_\eta]$ wurde bereits in Gl. (5.16), (5.17) angegeben. Für $[N_\xi]$ ergibt sich damit folgender Aufbau:

$$[N_\xi] = \begin{bmatrix} f_{1,1} \cdot [I_3] & f_{1,2} \cdot [I_3] & f_{1,3} \cdot [I_3] & f_{1,4} \cdot [I_3] & f_{1,9} \cdot [I_3] & f_{1,11} \cdot [I_3] \\ f_{2,1} \cdot [I_3] & f_{2,2} \cdot [I_3] & f_{2,3} \cdot [I_3] & f_{2,4} \cdot [I_3] & f_{2,9} \cdot [I_3] & f_{2,11} \cdot [I_3] \end{bmatrix} \quad (5.54a)$$

bei linearer Ansatzfunktion über die Höhe
und

$$[N_\xi] = \begin{bmatrix} f_{1,1} \cdot [I_3] & f_{1,2} \cdot [I_3] & f_{1,3} \cdot [I_3] & f_{1,4} \cdot [I_3] & f_{1,9} \cdot [I_3] & f_{1,10} \cdot [I_3] & f_{1,11} \cdot [I_3] & f_{1,12} \cdot [I_3] \\ f_{2,1} \cdot [I_3] & f_{2,2} \cdot [I_3] & f_{2,3} \cdot [I_3] & f_{2,4} \cdot [I_3] & f_{2,9} \cdot [I_3] & f_{2,10} \cdot [I_3] & f_{2,11} \cdot [I_3] & f_{2,12} \cdot [I_3] \\ f_{3,1} \cdot [I_3] & f_{3,2} \cdot [I_3] & f_{3,3} \cdot [I_3] & f_{3,4} \cdot [I_3] & f_{3,9} \cdot [I_3] & f_{3,10} \cdot [I_3] & f_{3,11} \cdot [I_3] & f_{3,12} \cdot [I_3] \end{bmatrix} \quad (5.54b)$$

bei quadratischer Ansatzfunktion über die Höhe.

Zur Ermittlung der Funktionen $f_{i,j}$ schreibt man die Matrizenmultiplikation nach Gl. (5.53) an und erhält mit $[N_\eta]$ nach Gl. (5.16) bzw. (5.17) bei linearer Ansatzfunktion

$$\begin{aligned}
& g_1 \cdot f_{1,j} + g_2 \cdot f_{2,j} = \\
& = \eta \left(-\frac{1}{2} f_{1,j} + \frac{1}{2} f_{2,j} \right) + \left(\frac{1}{2} f_{1,j} + \frac{1}{2} f_{2,j} \right) \quad (5.55a)
\end{aligned}$$

und bei quadratischer Ansatzfunktion

$$\begin{aligned}
& g_1 \cdot f_{1,j} + g_2 \cdot f_{2,j} + g_3 \cdot f_{3,j} = \\
& = \eta^2 \left(\frac{1}{2} f_{1,j} - f_{2,j} + \frac{1}{2} f_{3,j} \right) + \eta \left(-\frac{1}{2} f_{1,j} + \frac{1}{2} f_{3,j} \right) + f_{2,j} \quad (5.55b)
\end{aligned}$$

Die Funktionen h_i nach Gl. (5.51) bzw. (5.52) können ebenfalls als Polynom dargestellt werden:

$$h_1 = \eta \cdot b_{1,j} + b_{2,j} \quad (5.56a)$$

bei linearer Ansatzfunktion

$$h_1 = \eta^2 \cdot b_{1,j} + \eta \cdot b_{2,j} + b_{3,j} \quad (5.56b)$$

bei quadratischer Ansatzfunktion.

Durch einen Koeffizientenvergleich mit (5.55a) bzw. (5.55b) erhält man schließlich die Unbekannten f_{ij} zu:

$$\begin{aligned}
f_{1,j} &= -b_{1,j} + b_{2,j} \\
f_{2,j} &= b_{1,j} + b_{2,j} \quad (5.57a)
\end{aligned}$$

bei linearer Ansatzfunktion und zu

$$\begin{aligned}
f_{1,j} &= b_{1,j} - b_{2,j} + b_{3,j} \\
f_{2,j} &= b_{3,j} \\
f_{3,j} &= b_{1,j} + b_{2,j} + b_{3,j} \quad (5.57b)
\end{aligned}$$

bei quadratischer Ansatzfunktion.

i	1	2	3	4	9	11
1	0	0	$\frac{1}{2}(-\xi + \xi^2)$	$\frac{1}{2}(\xi + \xi^2)$	0	$1 - \xi^2$
2	$\frac{1}{2}(\xi + \xi^2)$	$\frac{1}{2}(-\xi + \xi^2)$	0	0	$1 - \xi^2$	0

Tabelle 2: Funktionen $f_{i,j}$ bei linearer Ansatzfunktion

i	1	2	3	4	9	10	11	12
1	0	0	$\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)$	$\frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)$	0	0	$1 - \xi^2$	0
2	$\frac{1}{4}(\xi^2 - 1)$	$\frac{1}{4}(\xi^2 - 1)$	$\frac{1}{4}(\xi^2 - 1)$	$\frac{1}{4}(\xi^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(1 - \xi^2)$	$\frac{1}{2}(1 - \xi)$	$\frac{1}{2}(1 - \xi^2)$	$\frac{1}{2}(1 + \xi)$
3	$\frac{1}{2}(\xi + \xi^2)$	$\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)$	0	0	$1 - \xi^2$	0	0	0

Tabelle 3: Funktionen $f_{i,j}$ bei quadratischer Ansatzfunktion

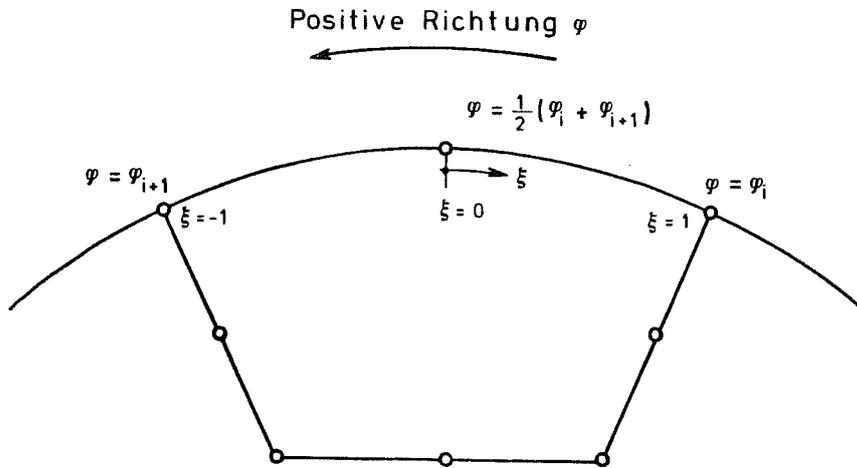


Bild 15: Zusammenhang zwischen der Elementkoordinate ξ und dem Öffnungswinkel φ des zylindrischen Koordinatensystems

Die Funktionen $f_{i,j}$ sind in den Tabellen 2 und 3 zusammengestellt.

Die Elementkoordinate ξ entspricht bei der Elementanordnung nach Bild 14 der globalen Koordinaten φ des Randelements. Aus Bild 15 erhält man den Zusammenhang zwischen ξ und φ für ein Element zu:

$$\xi = a_1 - a_2 \cdot \varphi \quad (5.58)$$

mit

$$a_1 = \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} \quad (5.59)$$

und

$$a_2 = \frac{2}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} \quad (5.60)$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß der kreisförmige Rand durch eine Parabel zweiter Ordnung angenähert werden kann.

Mit Gl. (5.58) wird in allen Elementen der Matrix $\begin{bmatrix} N_\xi \end{bmatrix}$ die Koordinate ξ durch die globale Koordinate φ ersetzt. $\begin{bmatrix} N_\xi \end{bmatrix}$ ist damit ausschließlich von der Winkelkoordinate φ abhängig.

Man führt nun die Ansatzfunktionen in der Produktdarstellung durch die Matrizen $\begin{bmatrix} N_\eta \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} N_\xi \end{bmatrix}$ (Gl. (5.53)) in die Gleichungen für die Fourierterme der Verschiebungen ein. Mit Gl. (5.50a) und (5.50b) erhält man:

$$\left\{ \bar{u}_{\text{sym},n} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{no} \right) \cdot \sum_{i=0}^{n_e-1} \left(\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \begin{bmatrix} \Phi_{\text{sym},n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_\eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_\xi \end{bmatrix} d\varphi \cdot \left\{ \underline{u}_{eo} \right\} \right) \quad (5.61a)$$

und

$$\left\{ \bar{u}_{\text{ant},n} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{no} \right) \cdot \sum_{i=0}^{n_e-1} \left(\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \begin{bmatrix} \Phi_{\text{ant},n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_\eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_\xi \end{bmatrix} d\varphi \cdot \left\{ \underline{u}_{eo} \right\} \right) \quad (5.61b)$$

Da die Matrix $\begin{bmatrix} N_\eta \end{bmatrix}$ von φ unabhängig und für alle Elemente gleich ist, kann sie vor den Integralausdruck und auch vor das Summenzeichen gezogen werden, wobei aus den Matrizenprodukten $\begin{bmatrix} \Phi_{\text{sym},n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \Phi_{\text{ant},n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}$ die Matrizen $\begin{bmatrix} \Theta_{\text{sym}} \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \Theta_{\text{ant}} \end{bmatrix}$ entstehen. Man erhält:

$$\left\{ \bar{u}_{\text{sym},n} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{no} \right) \cdot \begin{bmatrix} N_\eta \end{bmatrix} \cdot \sum_{i=0}^{n_e-1} \left(\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \begin{bmatrix} \Theta_{\text{sym}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_\xi \end{bmatrix} d\varphi \cdot \left\{ \underline{u}_{eo} \right\} \right) \quad (5.62a)$$

$$\left\{ \underline{u}_{\text{ant},n} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{\text{no}} \right) \cdot \left[N\eta \right] \cdot \sum_{i=0}^{n_e-1} \left(\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left[\theta_{\text{ant}} \right] \cdot \left[N_{\xi} \right] d\varphi \cdot \left\{ \underline{u}_{\text{eo}} \right\} \right) \quad (5.62b)$$

Die Matrizen $\left[\theta_{\text{sym}} \right]$ und $\left[\theta_{\text{ant}} \right]$ haben die Form:

$$\left[\theta_{\text{sym}} \right] = \begin{bmatrix} \left[T_{\text{sym}} \right] & 0 \\ 0 & \left[T_{\text{sym}} \right] \end{bmatrix} \quad (5.63a)$$

$$\left[\theta_{\text{ant}} \right] = \begin{bmatrix} \left[T_{\text{ant}} \right] & 0 \\ 0 & \left[T_{\text{ant}} \right] \end{bmatrix} \quad (5.63b)$$

bei linearer Ansatzfunktion über die Höhe und

$$\left[\theta_{\text{sym}} \right] = \begin{bmatrix} \left[T_{\text{sym}} \right] & 0 & 0 \\ 0 & \left[T_{\text{sym}} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[T_{\text{sym}} \right] \end{bmatrix} \quad (5.64a)$$

$$\left[\theta_{\text{ant}} \right] = \begin{bmatrix} \left[T_{\text{ant}} \right] & 0 & 0 \\ 0 & \left[T_{\text{ant}} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \left[T_{\text{ant}} \right] \end{bmatrix} \quad (5.64b)$$

bei quadratischer Ansatzfunktion über die Höhe, mit

$$\left[T_{\text{sym}} \right] = \left[\Phi_{\text{sym},n} \right] \cdot \left[T \right] \quad (5.65a)$$

$$\left[T_{\text{ant}} \right] = \left[\Phi_{\text{ant},n} \right] \cdot \left[T \right] \quad (5.65b)$$

Die Ausdrücke unter dem Integral faßt man zu den Elementmatrizen

$$\left[S_{el} \right] = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left[\theta_{sym} \right] \cdot \left[N_{\xi} \right] \cdot d\varphi \quad (5.66a)$$

$$\left[A_{el} \right] = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left[\theta_{ant} \right] \cdot \left[N_{\xi} \right] \cdot d\varphi, \quad (5.66b)$$

die den Anteil eines Elements wiedergeben, zusammen. Die numerische Ermittlung dieser Matrizen ist in Anhang C angegeben.

Geht man von Fouriertermen für das Verschiebungsfeld über die Höhe einer einzigen Schicht zu den Knotenpunktwerten $\left\{ \bar{u}_{s, sym} \right\}$ bzw. $\left\{ \bar{u}_{s, ant} \right\}$ nach Gl. (5.21), (5.22) über, erhält man unter Verwendung der Elementmatrizen (5.66a), (5.66b) aus (5.62a), (5.62b):

$$\left\{ \bar{u}_{s, sym} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{no} \right) \sum_{i=0}^{n_e-1} \left(\left[S_{el} \right] \cdot \left\{ u_{eo} \right\} \right) \quad (5.67a)$$

$$\left\{ \bar{u}_{s, ant} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \delta_{no} \right) \sum_{i=0}^{n_e-1} \left(\left[A_{el} \right] \cdot \left\{ u_{eo} \right\} \right) \quad (5.67b)$$

Bezeichnet man mit $\left\{ u_{so} \right\}$ den Vektor der Verschiebungen aller Punkte einer Schicht des dreidimensionalen Finite-Element-Modells, so lassen sich die Gleichungen (5.67a), (5.67b) auch in der Form

$$\left\{ \bar{u}_{s, sym} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{no} \right) \cdot \left[S_s \right] \cdot \left\{ u_{so} \right\} \quad (5.68a)$$

$$\left\{ \bar{u}_{s, ant} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{no} \right) \cdot \left[A_s \right] \cdot \left\{ u_{so} \right\} \quad (5.68b)$$

schreiben.

Die Matrizen $\left[S_s \right]$ und $\left[A_s \right]$ werden durch Addition der Elementmatrizen $\left[S_{el} \right]$ und $\left[A_{el} \right]$ aller Elemente der Schicht am Rand gebildet. Bei der Addition ist zu beachten, daß sich die Spalten der

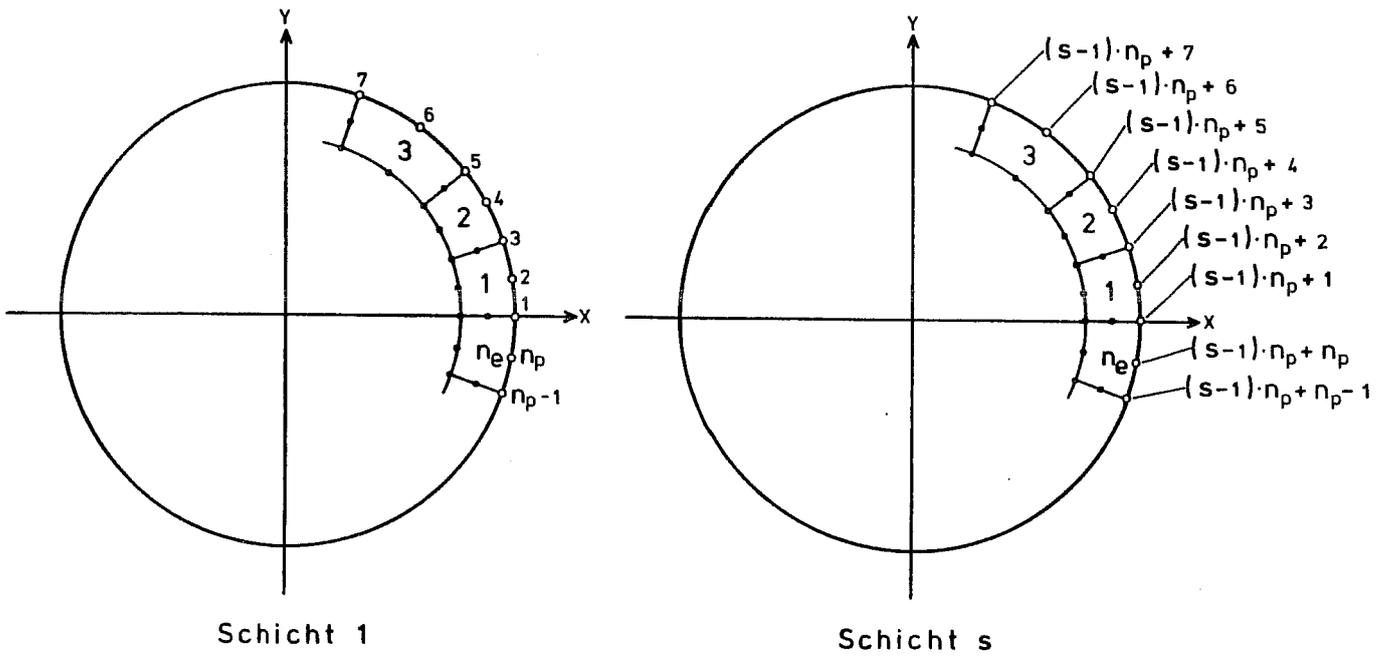


Bild 16: Knotennummerierung des Randelements bei linearer Ansatzfunktion über die Höhe

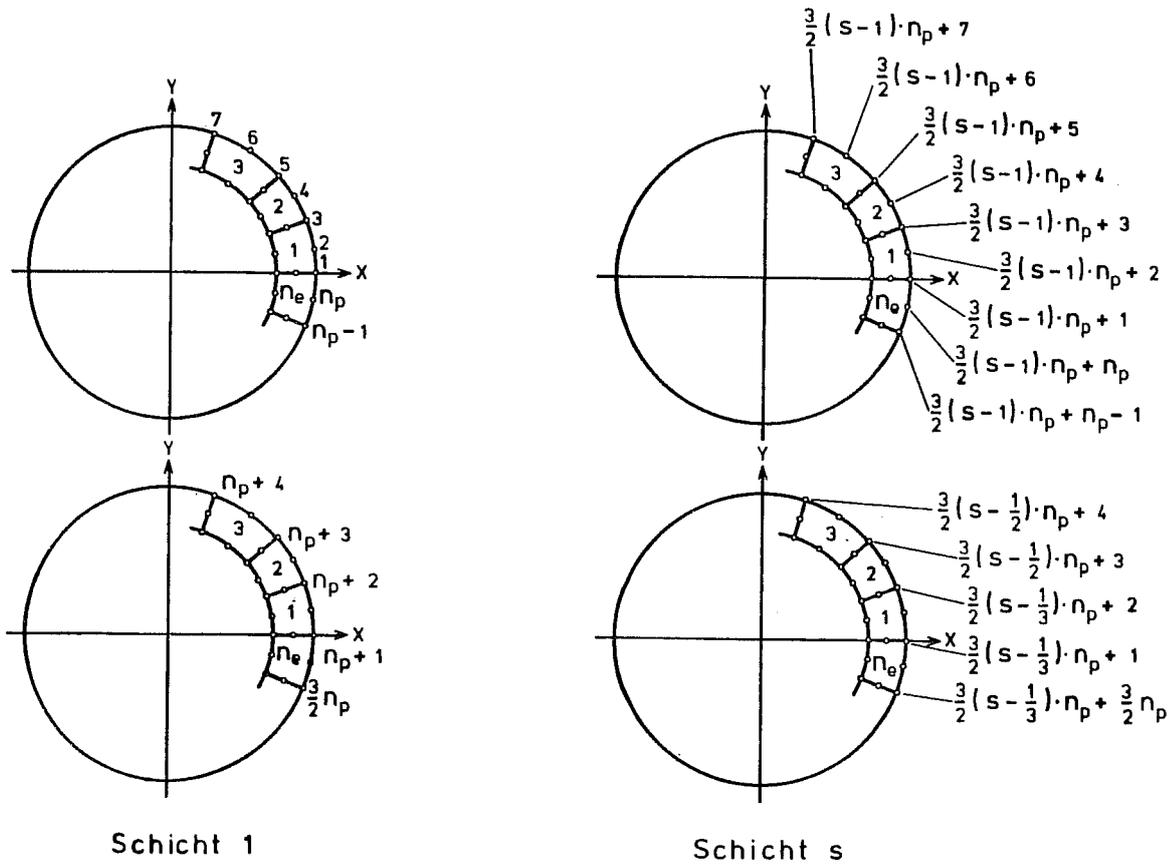


Bild 17: Knotennummerierung des Randelements bei quadratischer Ansatzfunktion über die Höhe

Elementknoten	Entsprechende Knotennummer des Randes
1	$2 \cdot n_e + 2 \cdot i - 1$
2	$2 \cdot n_e + 2 \cdot i + 1$
3	$2 \cdot i + 1$
4	$2 \cdot i - 1$
9	$2 \cdot n_e + 2 \cdot i$
11	$2 \cdot i$

Tabelle 4: Zuordnung von Elementknotennummern und Knotennummern des Randes bei linearer Ansatzfunktion über die Höhe

Elementknoten	Entsprechende Knotennummer des Randes
1	$3 \cdot n_e + 2 \cdot i - 1$
2	$3 \cdot n_e + 2 \cdot i + 1$
3	$2 \cdot i + 1$
4	$2 \cdot i - 1$
9	$3 \cdot n_e + 1$
10	$2 \cdot n_e + i + 1$
11	$2 \cdot i$
12	$2 \cdot n_e + i$

Tabelle 5: Zuordnung von Elementknotennummern und Knotennummern des Randes bei quadratischer Ansatzfunktion über die Höhe

Matrizen $[S_{el}]$ und $[A_{el}]$ auf die Numerierung der Elementknoten beziehen, während bei den Matrizen $[S_s]$ und $[A_s]$ die Spalten nach den globalen Knotennummern numeriert sind. Daher müssen vor der Addition der Elementmatrizen ihre Spalten umsortiert werden. Für die Knotenanordnung nach Bild 16 und 17 ist in den Tabellen 4 und 5 die Zuordnung von Elementknotennummer und Knotennummer in globalen Koordinaten angegeben. Dabei entspricht n_e der Anzahl der Elemente, die in einer Schicht am zylinderförmigen Rand anliegen, i ist die jeweilige Elementnummer. Da jedem Knotenpunkt jeweils drei Spalten entsprechen, nämlich für die Verschiebungen \underline{u} , \underline{v} , und \underline{w} sind beim Umsortieren und Aufaddieren der Spalten des Knotenpunktes n_{pi} jeweils alle Operationen mit den Spalten $(3 \cdot n_{pi} - 2)$, $(3 \cdot n_{pi} - 1)$, und $(3 \cdot n_{pi})$ durchzuführen.

Man ermittelt demnach für jedes Element einer Schicht, das am Rand anliegt, zunächst die Elementmatrizen $[S_{el}]$ und $[A_{el}]$ nach Anhang C. Anschließend bestimmt man für jeden Elementknotenpunkt mit Tabelle 4 bzw. 5 den zugehörigen globalen Knotenpunkt und addiert die dem Elementknotenpunkt entsprechenden Spalten der Matrizen $[S_{el}]$ und $[A_{el}]$ zu den zugehörigen Spalten der Matrizen $[S_s]$ und $[A_s]$.

Geht man von der einzelnen Schicht auf das gesamte System über, so erhält man aus Gl. (5.68a) und (5.68b) die Beziehungen

$$\left\{ \bar{\underline{u}}_{o, \text{sym}} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{no} \right) \cdot [S] \cdot \left\{ \underline{u}_o \right\} \quad (5.69a)$$

$$\left\{ \bar{\underline{u}}_{o, \text{ant}} \right\} = \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{no} \right) \cdot [A] \cdot \left\{ \underline{u}_o \right\} \quad (5.69b)$$

Die Vektoren $\left\{ \bar{\underline{u}}_{o, \text{sym}} \right\}$ und $\left\{ \bar{\underline{u}}_{o, \text{ant}} \right\}$ enthalten die symmetrischen und antimetrischen Fourierterme der Verschiebungen für alle Schichten nach Gl. (5.33). Im Vektor

$$\left\{ \begin{matrix} u \\ v \\ w \\ \vdots \end{matrix} \right\}_0 = \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{matrix}} \right\} \text{Verschiebungskomponenten Punkt 1} \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{matrix}} \right\} \text{Verschiebungskomponenten Punkt 2} \end{matrix} \quad (5.69c)$$

sind die Komponenten der Verschiebungen aller Punkte am Rand des dreidimensionalen zylinderförmigen Randes zusammengestellt. Die Matrizen $[S]$ und $[A]$ werden nach dem in Bild 18 bzw. 19 angegebenen Schema aus den Schichtmatrizen $[S_s]$ und $[A_s]$ aller Schichten aufgebaut. Da die untersten drei Reihen der Matrizen der nächsten darunter liegenden Schicht entsprechen (und die entsprechenden Elemente gleich sind), entfallen sie beim Aufbau der Matrizen $[S]$, $[A]$.

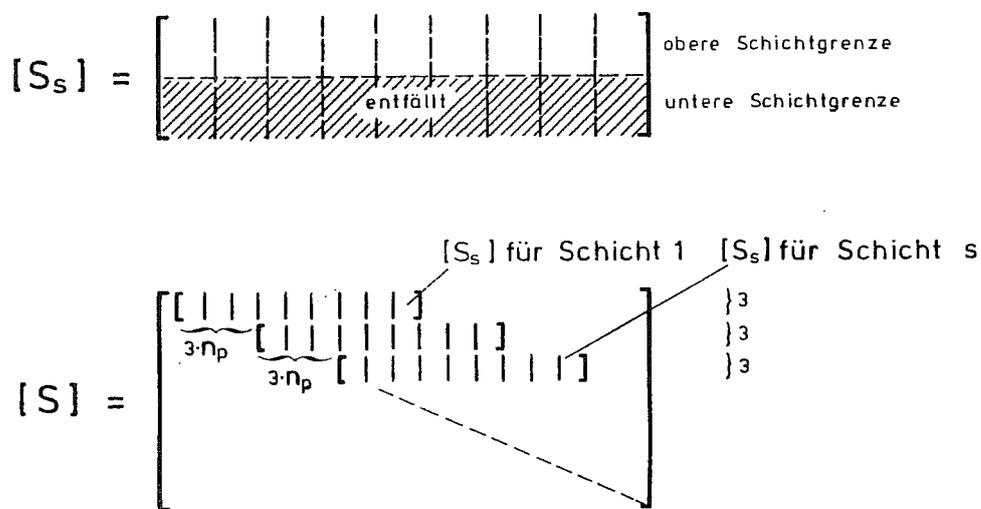


Bild 18: Überlagerung der Matrizen $[S_s]$, $[A_s]$
 - Lineare Ansatzfunktion über die Höhe

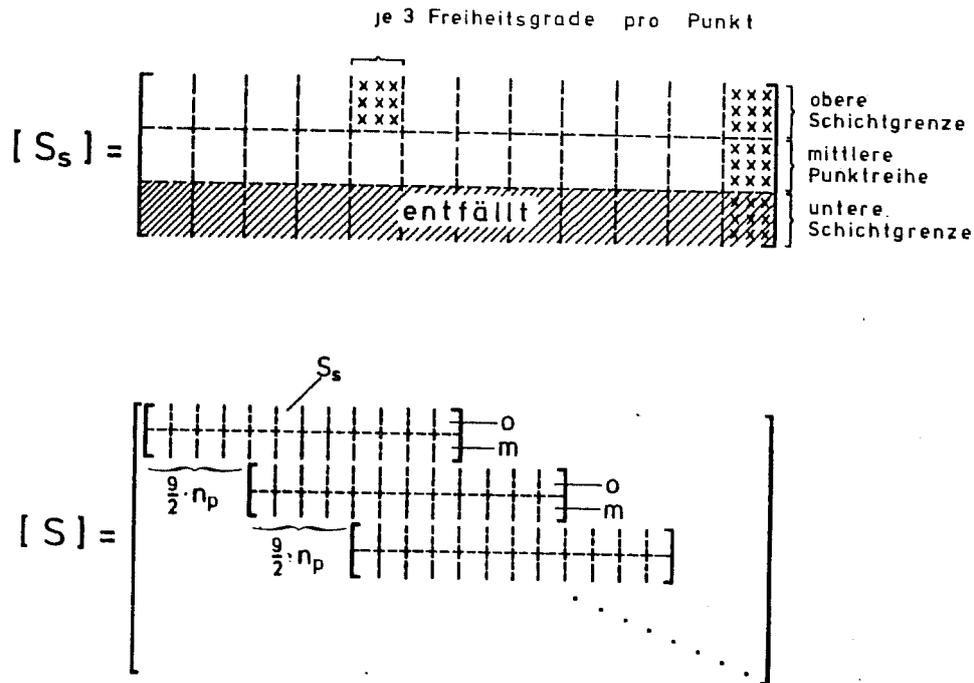


Bild 19: Überlagerung der Matrizen $[S_s]$, $[A_s]$
 - Quadratische Ansatzfunktion über die Höhe

Die Gleichungen (5.69a), (5.69b) stellen die Beziehungen zwischen den Fouriertermen der Verschiebungen und den Knotenpunktverschiebungen am zylinderförmigen Rand des dreidimensionalen Finite-Element-Modells her. Damit kann jedes Verschiebungsfeld des Randes des dreidimensionalen Finite-Element-Modells durch die symmetrischen und antimetrischen Fourierterme nach Gl. (5.1) ausgedrückt werden.

5.2.4 Transformation der Randkräfte

Durch die Transformationsgleichungen für die am Rand wirkenden Kräfte sollen die Kraftgrößen des diskretisierten Bereichs durch die Fourierterme der Kraftgrößen des rotationssymmetrischen Randelements ausgedrückt werden. Im diskretisierten Bereich bilden die Knotenpunktkräfte in kartesischen Koordinaten die zu untersuchenden Kraftgrößen. Für das rotationssymmetrische Randelement werden die

Kraftgrößen durch die in Gl. (5.40) enthaltenen Kräfte dargestellt.

Zur Herleitung der Beziehung fasst man die im Randelement wirkenden Spannungen als Flächenlast auf, die auf die Oberfläche der am Rand anliegenden Elemente wirkt. Für eine auf ein Finites Element einwirkende Flächenlast wurde bereits mit Gl. (3.8) die Beziehung zur Ermittlung der entsprechenden Knotenkräfte angegeben. Die Oberflächenlasten werden darin in kartesischen Koordinaten beschrieben. Sie müssen zunächst auf die Spannungen im zylindrischen Koordinatensystem transformiert werden. Diese können dann in eine Fourierreihe entwickelt werden. Damit lassen sich die am Rand des diskretisierten Bereichs wirkenden Knotenpunktskräfte durch eine Fourierreihe der Kräfte in Zylinderkoordinaten darstellen.

Die Spannungen, die in der Fläche zwischen Randelement und den Finiten Elementen des diskretisierten Bereichs wirken, greifen als Oberflächenlasten an der am Rand anliegenden Seitenfläche der Elemente an. Dieser Belastung entsprechen die Knotenpunktskräfte nach Gl. (3.8):

$$\left\{ \underline{p}_e \right\} = \left[N \right]^T \left\{ \underline{p} \right\} dA \quad (3.8)$$

Im Vektor

$$\left\{ \underline{p} \right\} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

sind die Oberflächenlasten in x-, y- und z-Richtung zusammengefasst. Der Vektor $\left\{ \underline{p}_e \right\}$ enthält die Knotenpunktskräfte in x-, y- und z-Richtung für die Knotenpunkte des Elements, bezogen auf die Element-Knotennummern des dreidimensionalen isoparametrischen Elements (Bild 4). Ordnet man das Element nach Bild 14 am zylinderförmigen Rand an, so ruft die Belastung der das Randelement berührenden Fläche nach Gl. (3.8) lediglich Kräfte in den Knotenpunkten 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11 und 12 hervor. Der Vektor $\left\{ \underline{p}_e \right\}$

enthält demnach beim Element mit quadratischer Ansatzfunktion über die Höhe 8×3 und bei linearer Ansatzfunktion 6×3 Elemente. Für die Knotenpunkte am Rand wurde die Matrix $[N]$ bereits in Gl. (5.51) bzw. (5.52) angegeben.

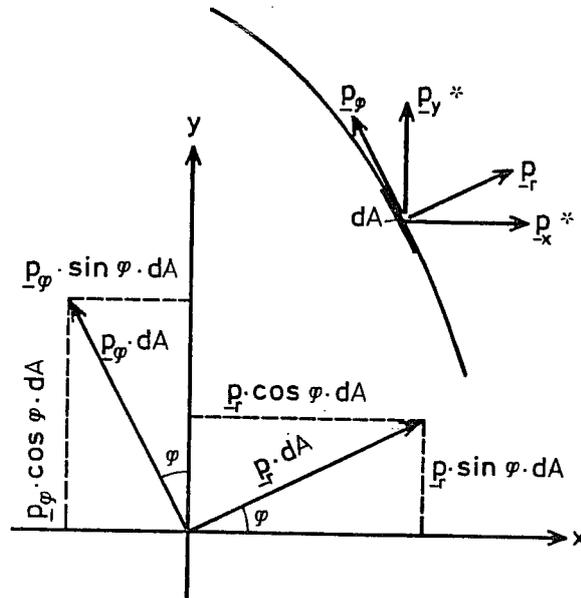


Bild 20: Koordinatentransformation der Spannungen am Elementrand

Zunächst werden die in Gl. (3.8) enthaltenen Oberflächenlasten von kartesischen in Zylinderkoordinaten transformiert. Die auf das Flächenelement dA des zylinderförmigen Randes bezogenen Kräfte in x -, y - und z -Richtung werden mit p_x^* , p_y^* und p_z^* bezeichnet. Sie werden später anstelle der Oberflächenlasten $\{p\}$ in Gl. (3.8) eingeführt, in der über das Flächenelement dA des gekrümmten Randes zu integrieren ist. Da sich sowohl die bezogenen Kräfte p_r , p_z , p in Zylinderkoordinaten als auch die Oberflächenlasten p_x^* , p_y^* , p_z^* in kartesischen Koordinaten auf dasselbe Flächenelement dA beziehen, können beide Flächenlasten wie Kräfte transformiert werden. Nach Bild 20 erhält man:

$$\begin{Bmatrix} p_x^* \\ p_y^* \\ p_z^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \\ p_\varphi \end{Bmatrix} \quad (5.71)$$

$$\begin{Bmatrix} p^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} p_z \end{Bmatrix} \quad (5.71a)$$

Die Oberflächenlasten werden in Gl. (3.8) über das Flächenelement dA integriert. Beschreibt man die Begrenzung des isoparametrischen Elements näherungsweise durch einen Kreisbogen anstatt einer Parabel, erhält man das Flächenelement zu:

$$dA = r_o \cdot d\varphi \cdot dz \quad (5.72)$$

Nunmehr setzt man die Zerlegung der Matrix $[N]$ in die jeweils von den Elementkoordinaten ξ und η abhängigen Matrizen $[N_\xi]$ und $[N_\eta]$ nach Gl. (5.53), die Transformation der Oberflächenlasten nach Gl. (5.71) und die Annäherung des Flächenelements, Gl. (5.72) in die Beziehung (3.8) für die Knotenkräfte ein und erhält:

$$\begin{Bmatrix} p_e \end{Bmatrix} = r_o \cdot \int_{z_i}^{z_{i+1}} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \begin{bmatrix} N_\xi \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} N_\eta \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} p_z \end{Bmatrix} d\varphi \cdot dz \quad (5.73)$$

Die Integration ist über die gesamte Fläche, an der das Element den zylinderförmigen Rand berührt, durchzuführen.

Man setzt nun für die Oberflächenlasten $\{p_z\}$ die Entwicklung in eine Fourierreihe nach Gl. (5.5a) ein. Damit lautet Gl. (5.73):

$$\begin{aligned}
\left\{ \underline{P}_e \right\} = & r_o \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{z_i}^{z_{i+1}} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left[N_{\xi} \right]^T \cdot \left[N_{\eta} \right]^T \cdot \left[T \right]^T \cdot \left[\Phi_{\text{sym},n} \right] \right. \\
& \cdot \left. \left\{ \bar{P}_{\text{sym},n} \right\} d\varphi \cdot dz \right. \\
& + \left. \int_{z_i}^{z_{i+1}} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left[N_{\xi} \right]^T \cdot \left[N_{\eta} \right]^T \cdot \left[T \right]^T \cdot \left[\Phi_{\text{ant},n} \right] \cdot \left\{ \bar{P}_{\text{ant},n} \right\} d\varphi \cdot dz \right)
\end{aligned} \tag{5.74}$$

In dieser Gleichung sind die Matrizen $\left[N_{\xi} \right]$, $\left[\Phi_{\text{sym},n} \right]$ und $\left[\Phi_{\text{ant},n} \right]$ von der Koordinaten φ , die Matrix $\left[N_{\eta} \right]$ und die Vektoren $\left\{ \bar{P}_{\text{sym},n} \right\}$ und $\left\{ \bar{P}_{\text{ant},n} \right\}$ von der Koordinate z abhängig. Zur Trennung der von φ und z abhängigen Terme wird die bei den Transformationsgleichungen für die Verschiebungen (beim Übergang von Gl. (5.61) zu Gl. (5.62)) schon verwendete Identität

$$\begin{aligned}
\left[\Phi_{\text{sym},n} \right] \cdot \left[T \right] \cdot \left[N_{\eta} \right] \cdot \left[N_{\xi} \right] &= \left[N_{\eta} \right] \cdot \left[\Theta_{\text{sym}} \right] \cdot \left[N_{\xi} \right] \\
\left[\Phi_{\text{ant},n} \right] \cdot \left[T \right] \cdot \left[N_{\eta} \right] \cdot \left[N_{\xi} \right] &= \left[N_{\eta} \right] \cdot \left[\Theta_{\text{ant}} \right] \cdot \left[N_{\xi} \right]
\end{aligned}$$

herangezogen. Gleichung (5.74) lautet damit

$$\begin{aligned}
\left\{ \underline{P}_e \right\} = & r_o \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left[N_{\xi} \right]^T \cdot \left[\Theta_{\text{sym}} \right]^T d\varphi \cdot \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left[N_{\eta} \right]^T \cdot \left\{ \bar{P}_{\text{sym},n} \right\} dz \\
& + \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left[N_{\xi} \right]^T \cdot \left[\Theta_{\text{ant}} \right]^T d\varphi \cdot \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left[N_{\eta} \right]^T \cdot \left\{ \bar{P}_{\text{ant},n} \right\} dz
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Die beiden Integrale über den Öffnungswinkel φ sind dabei die Transponierten der in Gl. (5.66a) und in Gl. (5.66b) definierten Matrizen $\left[S_{\text{el}} \right]$ und $\left[A_{\text{el}} \right]$. Die beiden Integrale über die Höhenkoordinate z sind für alle Elemente der Schicht gleich. Für die

Schicht s erhält man nach Gl. (5.40):

$$\left\{ \bar{P}_{s, \text{sym}} \right\} = r_o \cdot \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left[N_\eta \right]^T \cdot \left\{ \bar{P}_{\text{sym}, n} \right\} dz \quad (5.76a)$$

$$\left\{ \bar{P}_{s, \text{ant}} \right\} = r_o \cdot \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left[N_\eta \right]^T \cdot \left\{ \bar{P}_{\text{ant}, n} \right\} dz \quad (5.76b)$$

Damit lautet Gl. (5.75):

$$\left\{ P_e \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[S_{el} \right]^T \cdot \left\{ \bar{P}_{s, \text{sym}} \right\} + \left[A_{el} \right]^T \cdot \left\{ \bar{P}_{s, \text{ant}} \right\} \right) \quad (5.77)$$

Um die Kräfte zu erhalten, die in einer Schicht wirken, müssen die Elementkräfte nach Gl. (5.77) für alle Elemente der Schicht addiert werden. Dabei bleiben die Vektoren $\left\{ \bar{P}_{s, \text{sym}} \right\}$ und $\left\{ \bar{P}_{s, \text{ant}} \right\}$ für alle Elemente der Schicht gleich und können aus der Summe der zu addierenden Matrizenprodukte ausgeklammert werden. Es brauchen daher lediglich die Matrizen $\left[S_{el} \right]^T$ und $\left[A_{el} \right]^T$ der einzelnen Elemente zu den auf die Schicht bezogenen Matrizen $\left[S_s \right]^T$ und $\left[A_s \right]^T$ überlagert zu werden. Die Zeilennummern beziehen sich bei den Matrizen $\left[S_{el} \right]^T$ und $\left[A_{el} \right]^T$ auf die Elementknotennummern (Numerierung nach Bild 14) und bei den Matrizen $\left[S_s \right]^T$ und $\left[A_s \right]^T$ auf die Knotennummern einer Schicht 1 nach Bild 16 bzw. 17. Der Aufbau der Matrizen $\left[S_s \right]^T$ und $\left[A_s \right]^T$ führt - auf die Zeilen bezogen - zum gleichen Umordnungs- und Additionsschema wie bei der Bildung der Matrizen $\left[S_s \right]$ und $\left[A_s \right]$ bei der Aufstellung der Transformationsgleichungen für die Verschiebungen. Für alle Elemente einer Schicht erhält man somit aus Gl. (5.77) die Beziehung

$$\left\{ P_s \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[S_s \right]^T \cdot \left\{ \bar{P}_{s, \text{sym}} \right\} + \left[A_s \right]^T \cdot \left\{ \bar{P}_{s, \text{ant}} \right\} \right) \quad (5.78)$$

Um von einer einzelnen Schicht auf alle Knotenpunkte des Randes übergehen zu können, müssen die in Gl. (5.78) enthaltenen Summationen der Matrizenprodukte näher untersucht werden. In Bild 21

$$\begin{aligned}
 & [S_{s,1}]^T \cdot \{ \bar{P}_{1,sym} \} + [S_{s,2}]^T \cdot \{ \bar{P}_{2,sym} \} + \dots + [S_{s,n_s}]^T \cdot \{ \bar{P}_{n_s,sym} \} \\
 & \begin{array}{l}
 \text{3 x 3 Elemente} \\
 \text{3 x } n_p \left\{ \begin{array}{l} [S_{s,1}] \\ \vdots \\ [S_{s,n_s}] \end{array} \right\} \\
 \text{3 x } n_p \left\{ \begin{array}{l} [S_{s,1}] \\ \vdots \\ [S_{s,n_s}] \end{array} \right\} \\
 \text{3 x } n_p \left\{ \begin{array}{l} [S_{s,1}] \\ \vdots \\ [S_{s,n_s}] \end{array} \right\} \\
 = \\
 \left[\begin{array}{l} [S_{s,1}] \\ \vdots \\ [S_{s,n_s}] \end{array} \right]^T \cdot \left(\begin{array}{l} \{ \bar{P}_{1,sym} \} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{aligned}$$

$\{ \bar{P}_{1,sym} \}$ }⁹
 $\{ \bar{P}_{2,sym} \}$ }⁹
 $\{ \bar{P}_{n_s,sym} \}$ }⁶
 $\{ \bar{P}_{n_s,sym} \}$ }³

= 0
 der sich überlappende Bereich ist bei beiden Matrizen gleich

entfällt, da Knotenpunkte am starren Untergrund festgehalten

Bild 21: Überlagerung der Matrizenprodukte $[S_s]^T \cdot \{ \bar{P}_{-s,sym} \}$

ist die Summation des ersten Matrizenprodukts über alle Schichten für einen einzigen Fourierterm n dargestellt. Aufgrund der Eigenschaften des Aufbaus der Matrizen $[S_s]^T$ lassen sich die Schichtmatrizen und die Kraftvektoren getrennt überlagern. Die Überlagerung der Schichtmatrizen $[S_s]^T$ für das gesamte System führt also zur Transponierten der Matrix $[S]$ nach Gl. (5.69) (vgl. Bilder 18, 19). Auf die gleiche Weise werden auch die Matrizenprodukte der antisymmetrischen Fourierterme getrennt überlagert. Man erhält damit für das gesamte System aus Gl. (5.78) die Beziehung:

$$\left\{ \underline{P}_o \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left([S]^T \cdot \left\{ \bar{P}_{-o,sym} \right\} + [A]^T \cdot \left\{ \bar{P}_{-o,ant} \right\} \right) \quad (5.79)$$

Der Vektor

$$\left\{ \underline{P}_o \right\} = \begin{pmatrix} \underline{P}_{x,1} \\ \underline{P}_{y,1} \\ \underline{P}_{z,1} \\ \underline{P}_{x,2} \\ \underline{P}_{y,2} \\ \underline{P}_{z,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

enthält die Kräfte in x- y- und z-Richtung, die an den Knotenpunkten des Randes des diskretisierten Bereichs angreifen. Gleichung (5.79) stellt damit die Beziehung zwischen den Kräften am Rand des diskretisierten Bereichs und den Fouriertermen der Kräfte des rotationssymmetrischen Randelementes her.

5.2.5 Transformation der Steifigkeitsmatrix

Mit den Transformationsgleichungen für die Verschiebungen und für die Randkräfte stehen alle Beziehungen zur Transformation der rotationssymmetrischen Steifigkeitsmatrix zur Verfügung.

Die Steifigkeitsmatrix $[\underline{\bar{R}}]$, die in Gl. (5.41a) bzw. (5.41b) die Beziehung zwischen den Fouriertermen der Verschiebungen und Kräfte beschreibt, gilt sowohl für die symmetrischen wie auch für die antimetrischen Terme. Setzt man Gl. (5.41) in Gl. (5.79) ein und ersetzt man die Fourierterme der Randverschiebungen mit Gl. (5.69a), (5.69b) durch die Knotenpunktverschiebungen am Rand des diskretisierten Bereichs, so erhält man

$$\left\{ \underline{P}_o \right\} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \delta_{no} \right) \cdot \left([\underline{S}]^T \cdot [\underline{\bar{R}}] \cdot [\underline{S}] + [\underline{A}]^T \cdot [\underline{\bar{R}}] \cdot [\underline{A}] \right) \right) \cdot \left\{ \underline{u}_o \right\} \quad (5.81)$$

oder

$$\left\{ \underline{p}_o \right\} = \left[\underline{R} \right] \cdot \left\{ \underline{u}_o \right\} \quad (5.82)$$

Der Ausdruck

$$\left[\underline{R} \right] = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \delta_{no} \right) \cdot \left(\left[S \right]^T \cdot \left[\underline{R} \right] \cdot \left[S \right] + \left[A \right]^T \cdot \left[\underline{R} \right] \cdot \left[A \right] \right) \right) \quad (5.83)$$

ist die dynamische Steifigkeitsmatrix für den zylinderförmigen Rand des mit dreidimensionalen isoparametrischen Elementen diskretisierten Bereichs. Die Matrix $\left[\underline{R} \right]$ ist symmetrisch, da für den symmetrischen Anteil und entsprechend auch für den antimetrischen Anteil gilt:

$$\left(\left[S \right]^T \cdot \left[\underline{R} \right] \cdot \left[S \right] \right)^T = \left[S \right]^T \cdot \left[\underline{R} \right] \cdot \left[S \right],$$

und damit $\left[\underline{R} \right] = \left[\underline{R} \right]^T$, wenn $\left[\underline{R} \right]$ symmetrisch ist.

Die Matrizen $\left[S \right]$, $\left[A \right]$ und $\left[\underline{R} \right]$ sind von der Ordnung des Fourierterms abhängig. Die Summation in Gl. (5.83) ist theoretisch für unendlich viele Fourierterme durchzuführen. Praktisch genügt jedoch eine endliche Anzahl, die vom jeweiligen Verschiebungsfeld am Rand des Systems abhängt.

5.2.6 Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen im Randelement

Um die Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen innerhalb des Randelementes zu bestimmen, geht man von den Knotenpunktverschiebungen $\left\{ \underline{u}_o \right\}$ des Randes aus. Diese zerlegt man mit Gl. (5.69a) und (5.69b) in ihre symmetrischen und antimetrischen Fourierterme $\left\{ \underline{u}_{o,sym} \right\}$ und $\left\{ \underline{u}_{o,ant} \right\}$. Mit diesen können die Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen, wie in Abschnitt 5.1.6 für rotations-symmetrische Modelle angegeben, bestimmt werden.

6. SYSTEME MIT EINER ODER MEHREREN SYMMETRIEACHSEN

6.1 Allgemeines

Die Steifigkeitsmatrix des Randelementes wurde für einen zylinderförmigen Rand des in Finite Elemente diskretisierten Baugrundbereichs abgeleitet. Bei Systemen mit einer oder zwei Symmetrieachsen, wie z.B. bei einem Rechteckfundament, ist es sinnvoll, die Berechnung unter Ausnutzung der Symmetrie mit nur einer Hälfte bzw. einem Viertel des gesamten Systems durchzuführen. In diesem Fall wird für das Randelement eine Steifigkeitsmatrix benötigt, die den Zusammenhang zwischen Kräften und Verschiebungen an der Hälfte bzw. einem Viertel des Zylinders herstellt.

6.2 Reduktion der Steifigkeitsmatrix

Wurde die Randmatrix für den vollen Zylinder bereits berechnet, so kann diese Matrix durch Einführen der Symmetriebedingungen reduziert werden. Dazu stellt man zunächst Symmetriebedingungen der Verschiebungen auf, die angeben, in welchen Freiheitsgraden des zylinderförmigen Randelements die Verschiebungen aufgrund der Symmetrie oder Antimetrie des Verschiebungsfeldes gleich groß, entgegengesetzt gleich groß oder Null sind. Die entsprechenden Spalten der Steifigkeitsmatrix werden durch Addition bzw. Subtraktion zu einer einzigen Spalte zusammengefasst oder, wenn die Verschiebungen in einem Freiheitsgrad gleich Null sind, eliminiert. Damit enthält die Steifigkeitsmatrix nur noch so viele Spalten wie Freiheitsgrade am reduzierten symmetrischen System vorhanden sind. Die Anzahl der Zeilen wird dadurch reduziert, daß nur diejenigen Kräfte berücksichtigt werden, die an dem betrachteten Zylinderabschnitt des reduzierten symmetrischen Randelementes angreifen. Die Zeilen, die den Kräften in restlichen Zylinderbereich entsprechen, können daher eliminiert werden. Bei allen Kräften, die auf einer Symmetrieachse liegen, ist jedoch zu beachten, daß an jedem symmetrischen Teilsystem jeweils nur die halbe Kraft angreift. Daher sind alle Zeilen, die Kräften auf der Symmetrieachse entsprechen,

mit dem Faktor $1/2$ zu multiplizieren. Die so erhaltene Matrix enthält genausoviele Zeilen und Spalten wie Freiheitsgrade am Rand des reduzierten symmetrischen Systems vorhanden sind.

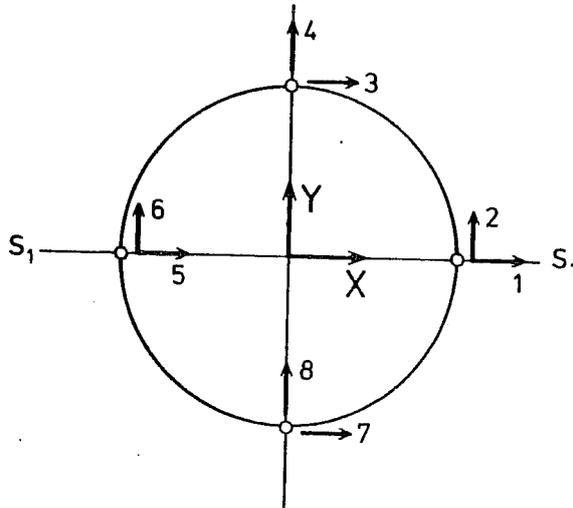


Bild 22: Freiheitsgrade eines Randelements (vereinfacht)

Das Vorgehen soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden. Für das in Bild 22 dargestellte Randelement mit insgesamt 8 Freiheitsgraden laute die Beziehung zwischen den Kräften $\underline{P}_1 \dots \underline{P}_8$ und den Verschiebungen $\underline{u}_1 \dots \underline{u}_8$:

$$\begin{Bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{P}_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} & \underline{a}_{13} & \cdots & \underline{a}_{18} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \underline{a}_{81} & \cdots & & \cdots & \underline{a}_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{u}_8 \end{Bmatrix}$$

Bei einem zur Achse $S_1 - S_1$ symmetrischen Verschiebungsfeld gilt:

$$\begin{aligned} \underline{u}_2 &= 0 & \underline{u}_4 &= -\underline{u}_8 \\ \underline{u}_3 &= \underline{u}_7 & \underline{u}_6 &= 0 \end{aligned}$$

Faßt man unter Ausnutzung dieser Bedingung die Spalten der Steifigkeitsmatrix zusammen, erhält man:

$$\begin{Bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \underline{P}_3 \\ \vdots \\ \underline{P}_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & (\underline{a}_{13} + \underline{a}_{17}) & (\underline{a}_{14} - \underline{a}_{18}) & \underline{a}_{15} \\ \underline{a}_{21} & (\underline{a}_{23} + \underline{a}_{27}) & (\underline{a}_{24} - \underline{a}_{28}) & \underline{a}_{25} \\ \underline{a}_{31} & (\underline{a}_{33} + \underline{a}_{37}) & (\underline{a}_{34} - \underline{a}_{38}) & \underline{a}_{35} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{a}_{81} & (\underline{a}_{83} + \underline{a}_{87}) & (\underline{a}_{84} - \underline{a}_{88}) & \underline{a}_{85} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_3 \\ \underline{u}_4 \\ \underline{u}_5 \end{Bmatrix}$$

Berücksichtigt man nur die Kräfte der entsprechenden Symmetriehälfte und beachtet man, daß alle Kräfte auf der Symmetrieachse mit ihrem halben Wert anzusetzen sind, ergibt sich:

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \underline{P}_4 \\ \frac{1}{2} \underline{P}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \underline{a}_{11} & \frac{1}{2}(\underline{a}_{13} + \underline{a}_{17}) & \frac{1}{2}(\underline{a}_{14} - \underline{a}_{18}) & \frac{1}{2} \underline{a}_{15} \\ \underline{a}_{31} & (\underline{a}_{33} + \underline{a}_{37}) & (\underline{a}_{34} - \underline{a}_{38}) & \underline{a}_{35} \\ \underline{a}_{41} & (\underline{a}_{43} + \underline{a}_{47}) & (\underline{a}_{44} - \underline{a}_{48}) & \underline{a}_{45} \\ \frac{1}{2} \underline{a}_{51} & \frac{1}{2}(\underline{a}_{53} + \underline{a}_{57}) & \frac{1}{2}(\underline{a}_{54} - \underline{a}_{58}) & \frac{1}{2} \underline{a}_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_3 \\ \underline{u}_4 \\ \underline{u}_5 \end{Bmatrix}$$

Entsprechend erhält man für ein antimetrisches Verschiebungsfeld mit

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= 0 & \underline{u}_4 &= \underline{u}_8 \\ \underline{u}_3 &= -\underline{u}_7 & \underline{u}_5 &= 0 \end{aligned}$$

die für das symmetrische Teilsystem reduzierte Matrix zu

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \underline{P}_2 \\ \underline{P}_3 \\ \underline{P}_4 \\ \frac{1}{2} \underline{P}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \underline{a}_{22} & \frac{1}{2}(\underline{a}_{23} - \underline{a}_{27}) & \frac{1}{2}(\underline{a}_{24} + \underline{a}_{28}) & \frac{1}{2} \underline{a}_{26} \\ \underline{a}_{32} & (\underline{a}_{33} - \underline{a}_{37}) & (\underline{a}_{34} + \underline{a}_{38}) & \underline{a}_{36} \\ \underline{a}_{42} & (\underline{a}_{43} - \underline{a}_{47}) & (\underline{a}_{44} + \underline{a}_{48}) & \underline{a}_{46} \\ \frac{1}{2} \underline{a}_{62} & \frac{1}{2}(\underline{a}_{63} - \underline{a}_{67}) & \frac{1}{2}(\underline{a}_{64} + \underline{a}_{68}) & \frac{1}{2} \underline{a}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \\ \underline{u}_4 \\ \underline{u}_6 \end{Bmatrix}$$

Diese Vorgehensweise zur Reduzierung der Steifigkeitsmatrix gilt sinngemäß auch bei mehr als einer Symmetrieachse. Sie erfordert jedoch die Berechnung der Steifigkeitsmatrix für das gesamte zylindrische Randelement und ist daher nur dann sinnvoll, wenn diese Matrix aus einer anderen Berechnung bereits vorliegt.

6.3 Steifigkeitsmatrix für ein symmetrisches Teilsystem

Soll ausschließlich ein symmetrisches Teilsystem untersucht werden, so berücksichtigt man zweckmäßigerweise die Symmetriebedingungen bereits beim Aufstellen der Steifigkeitsmatrix. Dadurch wird der Rechenaufwand bei der Bildung der Matrizenprodukte in Gl. (5.81) reduziert.

Im allgemeinen Fall betrachtet man ein System mit m Symmetrieachsen. Die Matrizen $[S]$ und $[A]$ erhält man ausgehend von der Integration über den gesamten Rand mit φ von 0 bis $2 \cdot \pi$ nach Gl. (5.49a,b) bzw. (5.50a,b).

Bei dieser Integration muß nun die Symmetriebedingung berücksichtigt werden. Dazu führt man in jedem der m Abschnitte eine Koordinate $\bar{\varphi}_i$ ein, die so festgelegt wird, daß der Verlauf der Verschiebungen am Rand aufgrund der Symmetrie in jedem der m Abschnitte von $\bar{\varphi}_i = 0$ bis $\bar{\varphi}_i = \frac{2 \cdot \pi}{m}$ gleich oder entgegengesetzt gleich groß ist und für den ersten Abschnitt $\bar{\varphi}_i = \varphi$ gilt. Die Beziehung zwischen der Winkelkoordinaten $\bar{\varphi}_i$ des Abschnittes i und dem Winkel φ läßt sich in der Form

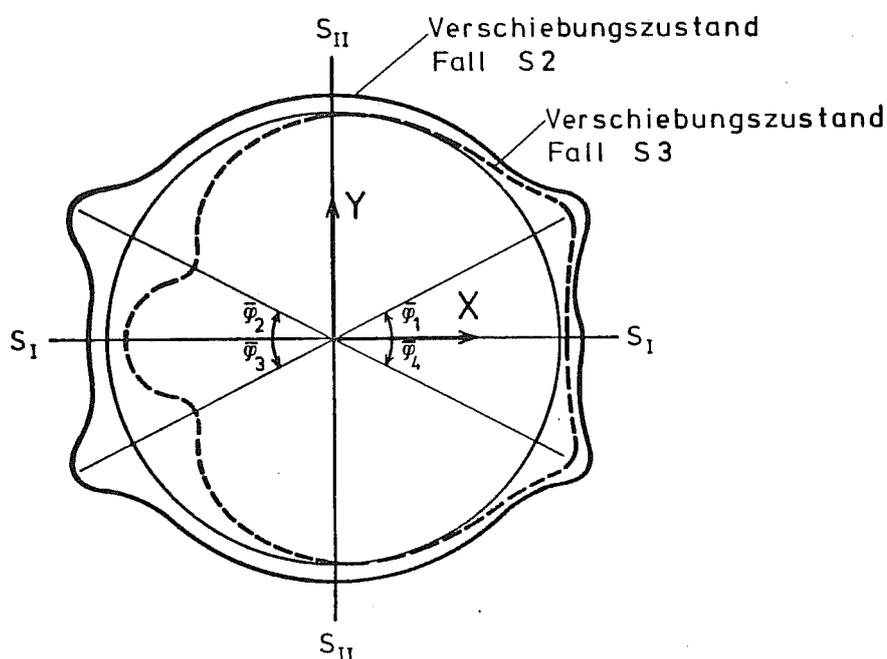
$$\bar{\varphi}_i = C_{ic} + C_{ie} \cdot \varphi \quad (6.1a)$$

oder

$$\varphi = -C_{ic} + C_{ie} \cdot \bar{\varphi}_i \quad (6.1b)$$

anschreiben, wobei C_{ic} immer ein Vielfaches oder ein Bruchteil von π ist und C_{ie} die Werte +1 oder -1 annehmen kann. Weiterhin wird der Wert C_{if} eingeführt, der gleich 1 ist, wenn die Verschiebungen

im Abschnitt i gleich den Verschiebungen im Abschnitt 1 sind, und der den Wert -1 annimmt, wenn die beiden Verschiebungen entgegengesetzt gleich sind. Für ein Beispiel mit zwei Symmetrieachsen sind die Werte C_{ic} , C_{ie} und C_{if} in Bild 23 angegeben.



i	C_{ic}	C_{ie}	C_{if}	
			Fall S2	Fall S3
1	0	1	1	1
2	π	-1	1	-1
3	$-\pi$	1	1	-1
4	0	-1	1	1

Bild 23: Funktionen C_{ic} , C_{ie} , C_{if} bei einem System mit 2 Symmetrieachsen, Fall S2 und S3

Mit der Symmetriebedingung, daß die Verschiebung $C_{if} \cdot f(\varphi)$ im Abschnitt i gleich der Verschiebung $f(\varphi)$ im Abschnitt 1 von $\varphi = 0$ bis $\frac{2 \cdot \pi}{m}$ ist, sowie mit Gl. (6.1a) erhält man in Gl. (5.6) für die einzelnen Terme:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \cos n\varphi \, d\varphi \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^{\frac{2\pi}{m}} C_{if} \cdot f(\varphi) \cdot \cos(-n \cdot C_{ic} \cdot C_{ie} + n \cdot C_{ie} \cdot \bar{\varphi}_1) \cdot d\bar{\varphi}_1 \\
&= \sum_{i=1}^m (C_{if} \cdot \cos(n \cdot C_{ic})) \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{m}} f(\varphi) \cdot \cos(n\varphi) d\varphi \\
&\quad + \sum_{i=1}^m (C_{if} \cdot \sin(n \cdot C_{ic})) \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{m}} f(\varphi) \cdot \sin(n\varphi) d\varphi \\
&= S_1 \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{m}} f(\varphi) \cdot \cos n\varphi \, d\varphi + S_2 \cdot \int_0^{\frac{2\pi}{m}} f(\varphi) \cdot \sin(n\varphi) d\varphi \tag{6.2}
\end{aligned}$$

mit

$$S_1 = \sum_{i=1}^m C_{if} \cdot \cos(n \cdot C_{ic}) \tag{6.3a}$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^m C_{if} \cdot \sin(n \cdot C_{ic}) \tag{6.3b}$$

und

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \sin n\varphi \, d\varphi \\
&= \sum_{i=1}^m \int_0^{\frac{2\pi}{m}} C_{if} \cdot f(\bar{\varphi}_1) \cdot \sin(-n \cdot C_{ie} \cdot C_{ic} + n \cdot C_{ie} \cdot \bar{\varphi}_1) \, d\bar{\varphi}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m \int_0^{\frac{2\pi}{m}} C_{if} \cdot f(\bar{\varphi}_{1i}) \cdot (\sin(-n \cdot C_{ie} \cdot C_{ic}) \cdot \cos(n \cdot C_{ie} \cdot \bar{\varphi}_1) \\
&\quad + \cos(n \cdot C_{ie} \cdot C_{ic}) \cdot \sin(n \cdot C_{ie} \cdot \bar{\varphi}_1)) d\bar{\varphi}_1 \\
&= A_1 \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \sin(n\varphi) d\varphi - A_2 \int_0^{\frac{2\pi}{m}} \cos(n\varphi) d\varphi \tag{6.4}
\end{aligned}$$

mit

$$A_1 = \sum_{i=1}^m C_{if} \cdot C_{ie} \cdot \cos(n \cdot C_{ic}) \tag{6.5a}$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^m C_{if} \cdot C_{ie} \cdot \sin(n \cdot C_{ic}) \tag{6.5b}$$

Die Auswertung der Ausdrücke nach Gl. (6.3a) und (6.3b) für die in den Tabellen 6 und 7 angegebenen Fälle zeigt, daß der Wert S_1 für die in Tabelle 6 angegebenen Werte von n immer gleich m ist, während für andere Werte von n $S_1 = 0$ gilt. Entsprechend erhält man bei einem antimetrischer Verschiebungsfeld für die in Tabelle 7 angegebenen Werte von n $A_1 = m$ und in allen übrigen Fällen $A_1 = 0$. Die Werte S_2 und A_2 ergeben sich in allen Fällen zu Null. Das bedeutet, daß bei symmetrischen Systemen mit symmetrischem Verschiebungsfeld die Matrix $[S]$ für den Bereich $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{2\pi}{m}$ zu ermitteln und mit m zu multiplizieren ist. In Gl. (5.67a, b) bzw. (5.68a, b) ist dann die Summation zum Aufbau der Matrix $[S_s]$ nur über die ersten $\frac{n}{m}$ Elemente durchzuführen. Daher nimmt Gl. (5.69a, b) bei symmetrischen Systemen mit symmetrischem Verschiebungsfeld nach Tabelle 6 die Form

$$\left\{ \bar{u}_{0, \text{sym}} \right\} = m \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{no} \right) \cdot [S_{\text{sym}}] \cdot \left\{ u_{0i} \right\} \tag{6.6a}$$

SYSTEM		m	FOURIER-TERME n_{sym}
S_1		2	0, 1, 2, 3, 4, 5,
S_2		4	0, 2, 4, 6, 8,
S_3		4	1, 3, 5, 7, 9,
S_4		8	0, 4, 8, 12, 16,

Tabelle 6: Fourierterme bei zur x-Achse symmetrischen Systemen mit symmetrischem Verschiebungsfeld

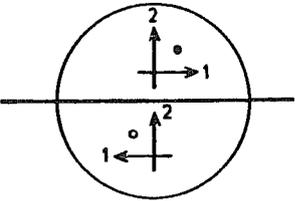
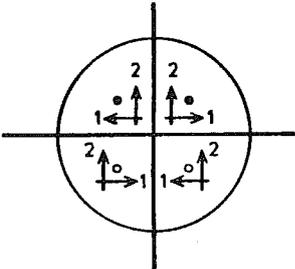
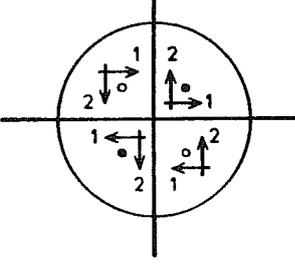
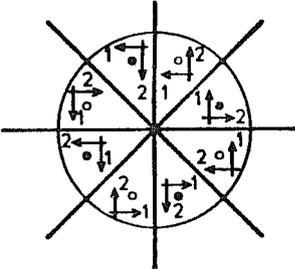
SYSTEM		m	FOURIER-TERME n_{ant}
A_1		2	0, 1, 2, 3, 4, 5,
A_2		4	1, 3, 5, 7, 9,
A_3		4	0, 2, 4, 6, 8,
A_4		8	0, 4, 8, 12, 16,

Tabelle 7: Fourierterme bei zur x-Achse symmetrischen Systemen mit antimetrischem Verschiebungsfeld

$$\left\{ \bar{u}_{o, \text{ant}} \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (6.6b)$$

und bei symmetrischen Systemen mit antimetrischem Verschiebungsfeld nach Tabelle 7 die Form

$$\left\{ \bar{u}_{o, \text{sym}} \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (6.7a)$$

$$\left\{ \bar{u}_{o, \text{ant}} \right\} = m \cdot \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{\text{no}} \right) \left[A_{\text{ant}} \right] \cdot \left\{ u_o \right\} \quad (6.7b)$$

an. Für alle Freiheitsgrade bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{2 \cdot \pi}{m}$, in denen sich aufgrund der Symmetrie die Verschiebungen zu Null ergeben, werden dabei die entsprechenden Spalten in $[S]$ bzw. $[A]$ eliminiert.

Bei der Ermittlung der Knotenpunktskräfte am Rand nach Gl. (5.75) werden ebenfalls nur diejenige Kräfte berücksichtigt, die am untersuchten Abschnitt des zylinderförmigen Randes angreifen. Das führt mit den Gleichungen (6.6a,b) und (6.7a,b) bei symmetrischen Systemen mit symmetrischem Verschiebungsfeld nach Tabelle 6 zur Steifigkeitsmatrix

$$\left[R_{\text{-sym}} \right] = \frac{m}{\pi} \sum_{n_{\text{sym}}} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{\text{no}} \right) \left[S_{\text{sym}} \right]^T \left[\bar{R} \right] \left[S_{\text{sym}} \right] \quad (6.8)$$

und bei symmetrischen Systemen mit antimetrischem Verschiebungsfeld nach Tabelle 7 zu:

$$\left[R_{\text{-ant}} \right] = \frac{m}{\pi} \sum_{n_{\text{ant}}} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{\text{no}} \right) \left[A_{\text{ant}} \right]^T \left[\bar{R} \right] \left[A_{\text{ant}} \right] \quad (6.9)$$

Bei der Summation über n sind lediglich die Fouriерterme n_{sym} bzw. n_{ant} nach Tabelle 6 und 7 zu berücksichtigen.

Die Anzahl der Reihen und Spalten der Matrix $\left[R_{\text{-sym}} \right]$ bzw. $\left[R_{\text{-ant}} \right]$ in Gl. (6.8), bzw. (6.9) entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade am Rand des symmetrischen Teilsystems.

Für den in Finite Elemente diskretisierten Bereich sind ebenso wie beim Randelement bei allen Punkten auf den Symmetrieachsen die Symmetriebedingungen zu berücksichtigen. Das bedeutet, daß alle Freiheitsgrade auf einer Symmetrieachse, deren Verschiebungen in benachbarten symmetrischen Teilsystem entgegengesetzt gleich groß sind, auf der Symmetrieachse den Wert Null haben und daher festzuhalten sind.

7. ERDBEBENERREGUNG

7.1 Freifeldschwingungen einer viskoelastischen Bodenschicht

Im Lastfall Erdbeben greift die Erregung als Fußpunktbeschleunigung am System an. Diese Erregung entspricht bei einer Finite-Element-Berechnung von Baugrundmodellen der in Höhe der unteren Begrenzung des Systems am starren Halbraum angreifenden Beschleunigung. Dabei geht man im allgemeinen davon aus, daß alle Punkte am starren Halbraum zu jedem Zeitpunkt in gleicher Größe beschleunigt werden, d.h. daß eine in vertikaler Richtung einfallende horizontal polarisierte Scherwelle die Beschleunigung des Baugrundmodells verursacht /30/.

Zunächst soll die Antwortschwingung eines vom Bauwerk nicht beeinflussten Bereichs des geschichteten Bodens, des sogenannten Freifelds, untersucht werden. Da die Verschiebung dieses Bereiches ausschließlich durch horizontal polarisierte Scherwellen verursacht wird, kann als Berechnungsmodell ein nur durch Schubbeanspruchungen deformierbarer Stab verwendet werden, dessen Verschiebungen am starren Halbraum festgehalten und an der Oberfläche frei sind (Bild 24).

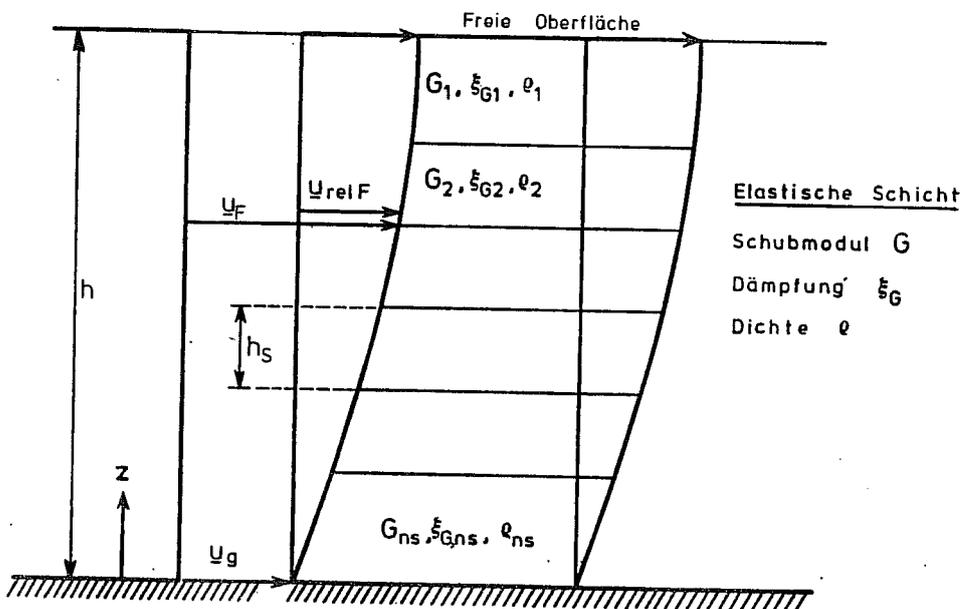


Bild 24: Freifeldschwingung einer elastischen Bodenschicht

Die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung des Stabes mit \underline{u}_F als Verschiebung lautet:

$$\frac{\underline{G}}{\underline{\varrho}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}_F}{\partial z^2} + \Omega^2 \cdot \underline{u}_F = 0 \quad (7.1)$$

Führt man für die Fußpunktserregung die Bodenverschiebung \underline{u}_g mit

$$\underline{u}_F = \underline{u}_{\text{rel}F} + \underline{u}_g \quad (7.2)$$

ein (Bild 24) und bezeichnet man mit $\underline{u}_{\text{rel}F}$ die Relativverschiebung, so erhält man

$$\underline{\varrho} \cdot \Omega^2 \cdot \underline{u}_{\text{rel}F} + \underline{G} \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}_{\text{rel}F}}{\partial z^2} = -\underline{\varrho} \cdot \Omega^2 \cdot \underline{u}_g \quad (7.3)$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (7.3) kann man in Form einer Übertragungsmatrix formulieren:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \underline{u}_{\text{rel}F} \\ \underline{\tau} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\underline{\kappa} \cdot h_s) & \frac{1}{\underline{\kappa} \cdot \underline{G}} \sin(\underline{\kappa} \cdot h_s) \\ -\underline{\kappa} \cdot \underline{G} \cdot \sin(\underline{\kappa} \cdot h_s) & \cos(\underline{\kappa} \cdot h_s) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{u}_{\text{rel}F_0} \\ \underline{\tau}_0 \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} \cos(\underline{\kappa} \cdot h_s) - 1 \\ -\underline{\kappa} \cdot \underline{G} \cdot \sin(\underline{\kappa} \cdot h_s) \end{Bmatrix} \cdot \underline{u}_g \end{aligned} \quad (7.4)$$

oder

$$\begin{Bmatrix} \underline{Z}_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{Z}_{F_0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{L}_s \end{Bmatrix} \cdot \underline{u}_g \quad (7.5)$$

mit

$$\underline{\kappa} = \Omega \cdot \sqrt{\frac{\underline{\varrho}}{\underline{G}}} \quad (7.5a)$$

Gleichung (7.4) beschreibt die Beziehung zwischen den Relativverschiebungen $\underline{u}_{\text{rel}F}$ und den Spannungen $\underline{\tau}$ am oberen und unteren

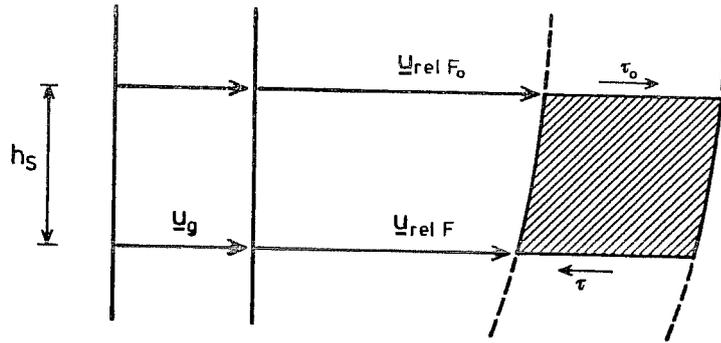


Bild 25: Element des Schub balkens zur Herleitung der Übertragungsmatrix

Rand einer Schicht (Bild 25). Als Baugrundkennwerte G , ξ_G und ϱ sind in Gl. (7.4) für die i -te Schicht jeweils die zugeordneten Werte G_i , ξ_{Gi} und ϱ_i und die Schichthöhe h_s einzusetzen.

Die Übertragungsfunktion der gesamten Schicht, die sich aus n_s einzelnen Schichten mit jeweils konstanten baugrunddynamischen Kennwerten zusammensetzt, erhält man durch Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \left\{ \underline{z}_{F, n_s} \right\} &= \left(\prod_{i=1}^{n_s} \left[\underline{F}_{-si} \right] \right) \cdot \left\{ \underline{z}_{F_0} \right\} \\ &+ \sum_{j=1}^{n_s-1} \left(\left(\prod_{i=j+1}^{n_s} \left[\underline{F}_{-si} \right] \right) \cdot \left\{ \underline{L}_{-sj} \right\} + \left\{ \underline{L}_{-sn_s} \right\} \right) \cdot \underline{u}_g \end{aligned} \quad (7.6)$$

mit $\left[\underline{F}_{-si} \right]$ als Übertragungsmatrix der i -ten Schicht und mit den Zustandsvektoren $\left\{ \underline{z}_{F_0} \right\}$, $\left\{ \underline{z}_{F_n} \right\}$ am oberen bzw. unteren Schicht-^srand. Mit dem damit bekannten Zustandsvektor $\left\{ \underline{z}_{F_0} \right\}$ lassen sich die Zustandsvektoren an den einzelnen Schichtgrenzen ermitteln. So erhält man den Zustandsvektor an der Schichtgrenze s zu:

$$\left\{ \underline{z}_{F, s} \right\} = \left(\prod_{i=1}^s \left[\underline{F}_{-si} \right] \cdot \left\{ \underline{z}_{F_0} \right\} \right) + \sum_{j=1}^{s-1} \left(\left(\prod_{i=j+1}^s \left[\underline{F}_{-si} \right] \right) \cdot \left\{ \underline{L}_{-sj} \right\} + \left\{ \underline{L}_{ss} \right\} \right) \cdot \underline{u}_g \quad (7.7)$$

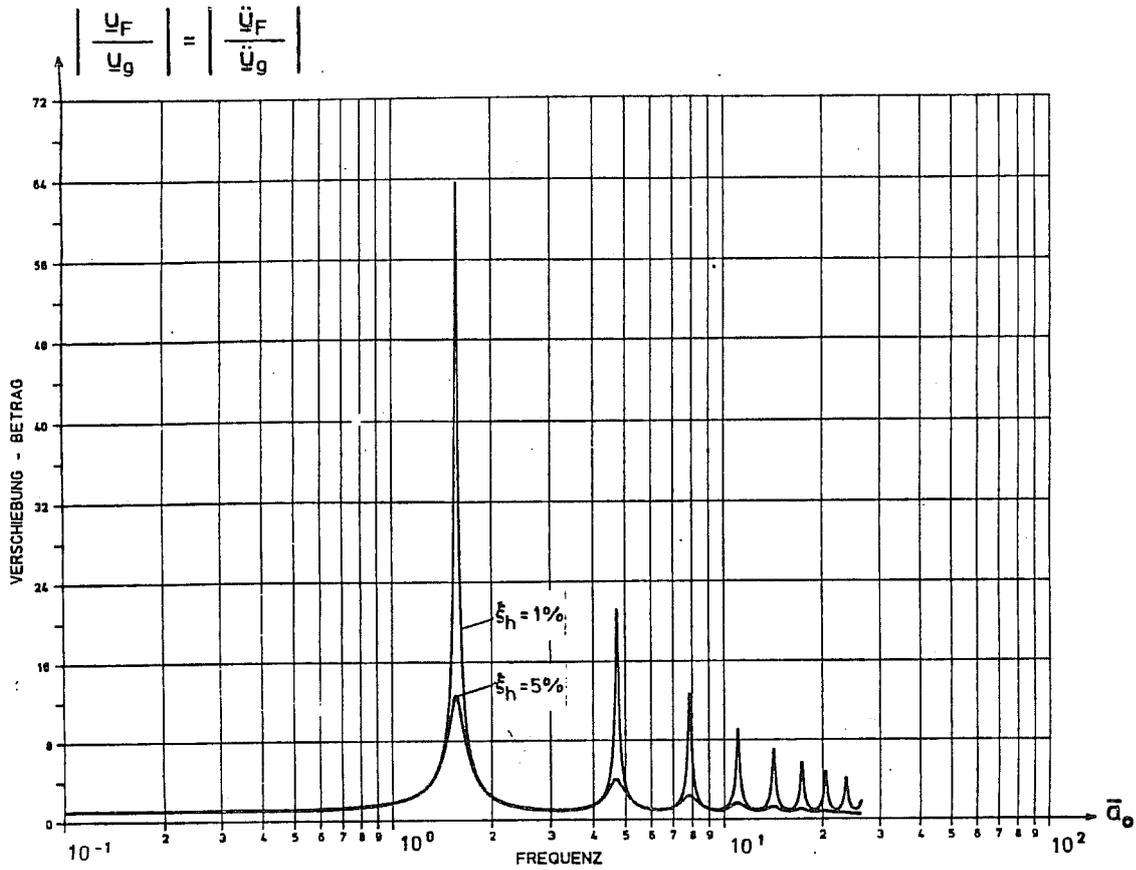


Bild 26: Übertragungsfunktion einer elastischen Schicht-Betrag der Verschiebung bzw. Beschleunigung

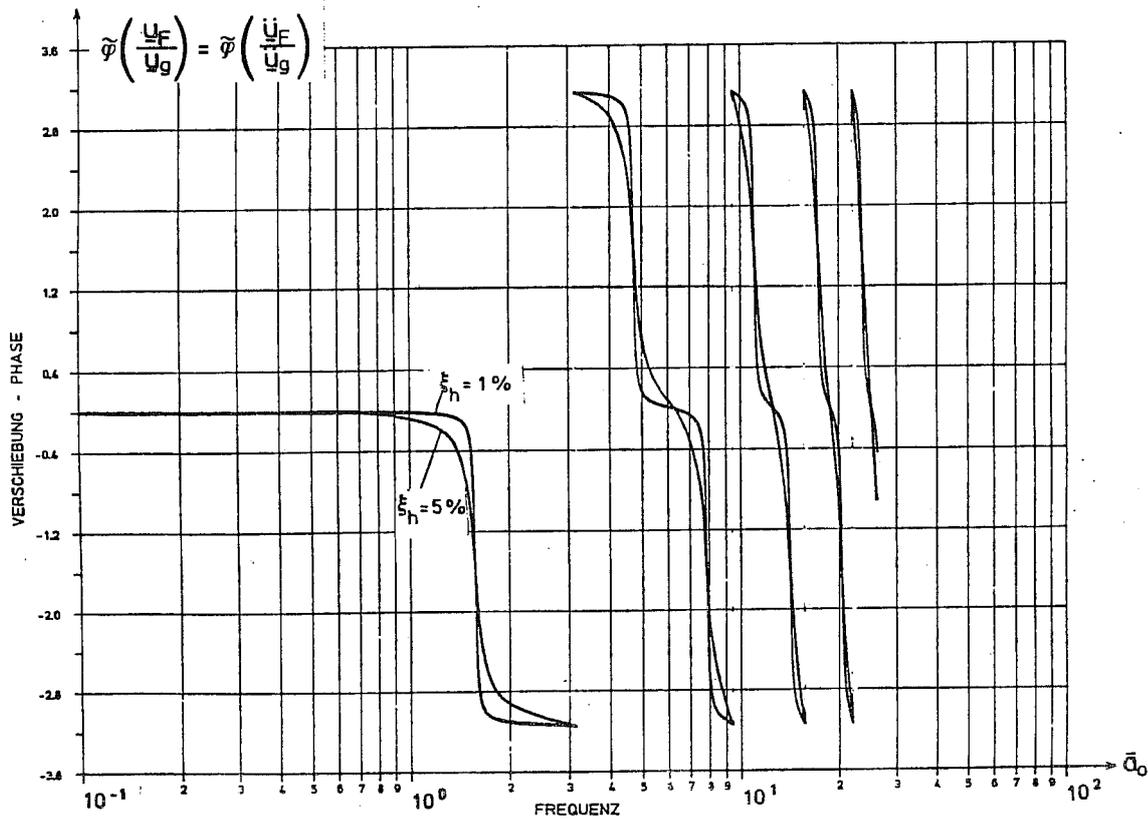


Bild 27: Übertragungsfunktion einer elastischen Schicht
- Phasenwinkel der Verschiebung bzw. Beschleunigung

Die Übertragungsfunktion für eine homogene Schicht der Höhe h ist für eine hysteretische Bodendämpfung von 1% und 5% in den Bildern 26 und 27 dargestellt. Dabei ist auf der Frequenzachse die dimensionslose Frequenz

$$\bar{a}_0 = \frac{\Omega \cdot h}{V_s} \quad (7.8)$$

und auf der Ordinate der Absolutwert der Verschiebung oder der Beschleunigung bezogen auf die Verschiebung bzw. Beschleunigung des Grundgebirges aufgetragen. Die Spitzen liegen bei den Eigenkreisfrequenzen der horizontalen Schwingung der elastischen Schicht

$$\omega_j = \frac{(2 \cdot j - 1) \cdot \pi \cdot V_s}{2 \cdot h} \quad j = 1, 2, 3 \quad (7.9)$$

bzw. bei

$$\bar{a}_{0j} = \frac{1}{2} \cdot (2j - 1) \cdot \pi \quad (7.10)$$

Der Betrag der Übertragungsfunktion in der j -ten Eigenfrequenz ergibt sich dabei zu (/31/):

$$\left| \frac{u_{\text{relF}, n_s}}{u_g} \right|_{\Omega = \omega_j} = \frac{2}{(2 \cdot j - 1) \pi} \cdot \frac{1}{\xi_G} \quad (7.11)$$

Den Fall der reinen vertikalen Erregung einer Bodenschicht kann man analog zum Fall der Horizontalerregung behandeln. Dabei muß die vertikale Relativverschiebung w_{relF} anstelle von u_{relF} und die vertikale Spannung σ_z anstelle von τ eingeführt werden. Die Differentialgleichung der vertikal harmonisch schwingenden Bodenschicht erhält man zu:

$$\frac{E_s}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Omega^2 \cdot w = 0 \quad (7.12)$$

Dabei bedeutet

$$\underline{E}_s = \underline{E} \frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} \quad (7.13)$$

die Steifezahl des Bodens.

Gleichung (7.12) ist analog aufgebaut wie die Differentialgleichung Gl. (7.1) für horizontale Schwingungen. Aus dieser Analogie folgt, daß alle für die Horizontalschwingung abgeleiteten Beziehungen übernommen werden können, wenn anstelle des Schubmoduls \underline{G} die Steifezahl \underline{E}_s eingesetzt wird und die Spannungen und Verschiebungen als in vertikaler Richtung wirkend angenommen werden.

7.2 Erdbebenerregte Schwingungen von Systemen mit Randelementen

Wird das Finite-Element-System eines Baugrundmodells mit Randelementen durch Erdbebeneinwirkung in Schwingung versetzt, so greift die Erregung in zweifacher Weise an. Am starren unteren Rand des Systems findet eine über die gesamte Fläche gleich, d.h. als von der x- und y-Koordinate unabhängig angenommene Verschiebung statt. Ihre Komponenten in x-, y- und z-Richtung seien mit \underline{u}_g , \underline{v}_g und \underline{w}_g bezeichnet. Die gesamte Verschiebung eines Knotenpunktes des Systems setzt sich dann aus den Relativverschiebungen \underline{u}_{rel} , \underline{v}_{rel} , \underline{w}_{rel} und der Verschiebung des unteren Randes zusammen, so daß

$$\underline{u} = \underline{u}_g + \underline{u}_{rel} \quad (7.14a)$$

$$\underline{v} = \underline{v}_g + \underline{v}_{rel} \quad (7.14b)$$

$$\underline{w} = \underline{w}_g + \underline{w}_{rel} \quad (7.14c)$$

gilt (Bild 28).

Neben der Erregung durch die vorgegebenen Verschiebungen des unteren Randes findet bei Systemen mit Randelementen auch eine

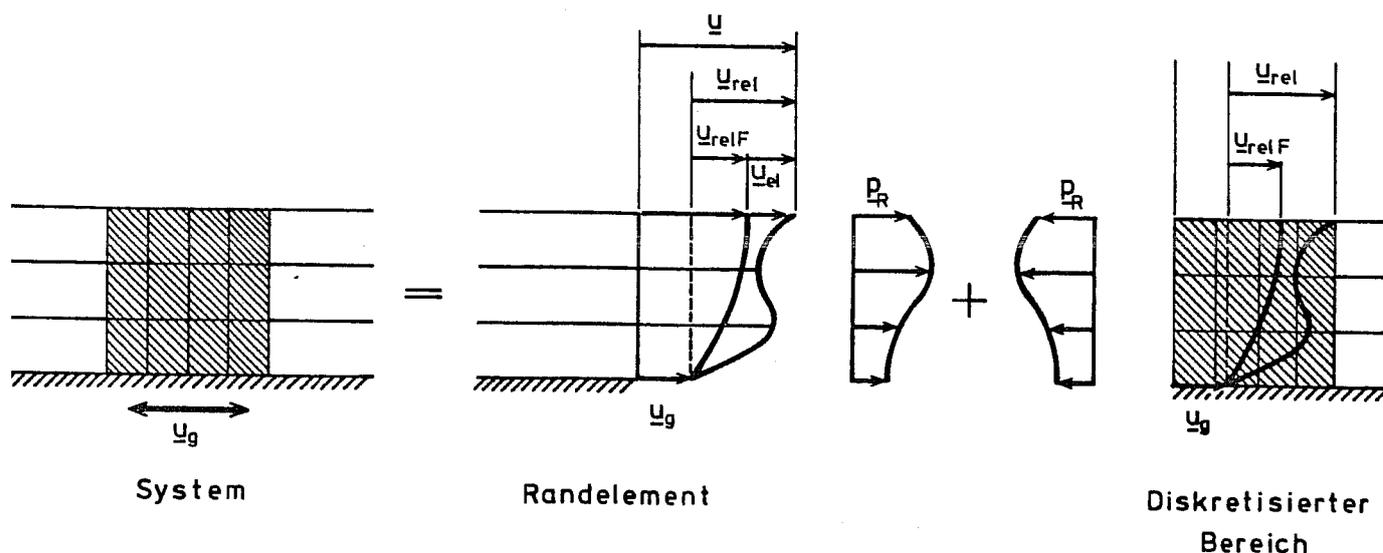


Bild 28: Kräfte und Verschiebungen am Rand des diskretisierten Bereichs

Erregung durch die am vertikalen Rand auf das System übertragenen Kräfte statt. Die Bewegungsgleichung eines Finite-Element-Systems mit einem Randelement kann daher entsprechend Gl. (3.10) geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 & -\Omega^2 \cdot \left[M_s \right] \left(\left\{ e_x \right\} \cdot \underline{u}_g + \left\{ e_y \right\} \cdot \underline{v}_g + \left\{ e_z \right\} \cdot \underline{w}_g + \left\{ u_{rel} \right\} \right) \\
 & + \left[K_s \right] \cdot \left\{ u_{rel} \right\} + \left\{ P_R \right\} = \left\{ 0 \right\}
 \end{aligned} \quad (7.15)$$

oder

$$\begin{aligned}
 & \left(-\Omega^2 \cdot \left[M_s \right] + \left[K_s \right] \right) \cdot \left\{ u_{rel} \right\} = \\
 & \Omega^2 \cdot \left[M_s \right] \left(\left\{ e_x \right\} \cdot \underline{u}_g + \left\{ e_y \right\} \cdot \underline{v}_g + \left\{ e_z \right\} \cdot \underline{w}_g \right) - \left\{ P_R \right\}
 \end{aligned} \quad (7.15a)$$

Der Vektor $\{ e_x \}$ enthält in allen Elementen, die einer Verschiebung in x-Richtung entsprechen, eine 1, während alle übrigen Elemente des Vektors Null sind. Entsprechend sind $\{ e_y \}$ und $\{ e_z \}$ für die y- und z-Richtung definiert. In Gl. (7.15) wurde berücksichtigt, daß

eine Starrkörperverschiebung des Systems keine von der Systemsteifigkeit abhängigen Kräfte hervorruft und somit z.B. der Term $\left[\underline{K}_s \right] \cdot \{ e_x \} \cdot \underline{u}_g$ gleich Null ist.

Im Folgenden sollen nun die vom vertikalen Rand auf das System übertragenen Kräfte näher untersucht werden. Diese Kräfte setzen sich aus zwei Anteilen zusammen. Den ersten Anteil bildet eine Kräftegruppe, die bei einem homogenen geschichteten System auftritt, bei dem also kein Bauwerk oder sonstige Störungen der Homogenität vorhanden sind und damit das Verschiebungsfeld nur von der z-Koordinate und nicht von der x- und y-Koordinate abhängt. Berechnet man ein solches System z.B. unter einer reinen vertikalen Erregung, so werden zwischen Randelement und diskretisiertem Bereich Kräfte übertragen. Diese Kräfte sind im Fall der reinen vertikalen Erregung horizontal gerichtet und bewirken, daß die Dehnungen in horizontaler Richtung gleich Null sind. Entsprechend treten bei reiner horizontaler Erregung Vertikalkräfte auf, die bewirken, daß sich der Rand des diskretisierten Bereichs nicht in vertikaler Richtung verschiebt.

Diese Kräfte erhält man nach /2/ bei vertikaler Erregung zu

$$\left\{ \bar{P}_{o,sym,0} \right\} = - r_o \left[\tilde{D} \right] \cdot \left\{ \bar{u}_{relF,sym,0} \right\} \quad (7.16a)$$

und bei horizontaler Erregung zu

$$\left\{ \bar{P}_{o,sym,1} \right\} = r_o \left[\tilde{D} \right] \cdot \left\{ \bar{u}_{relF,sym,1} \right\} \quad (7.16b)$$

$$\left\{ \bar{P}_{o,ant,1} \right\} = r_o \left[\tilde{D} \right] \cdot \left\{ \bar{u}_{relF,ant,1} \right\} \quad (7.16c)$$

Dabei sind $\left\{ \bar{P}_{o,sym,0} \right\}$, $\left\{ \bar{P}_{o,sym,1} \right\}$ und $\left\{ \bar{P}_{o,ant,1} \right\}$ das nullte symmetrische, das erste symmetrische und das erste antimetrische Fourierglied der Randkräfte. Die Vektoren $\left\{ \bar{u}_{relF,sym,0} \right\}$, $\left\{ \bar{u}_{relF,sym,1} \right\}$, $\left\{ \bar{u}_{relF,ant,1} \right\}$ stellen die entsprechenden Fourierterme der relativen Freifeldverschiebungen dar. Da die Verschiebungen nur von der Höhe z und nicht von der x- und y-Koordinate abhängen, genügen zur Beschreibung des gesamten

Verschiebungsfeldes zwei Fourierterme, und zwar des nullten ($n = 0$) symmetrischen für die vertikale Erregung, des ersten ($n = 1$), symmetrischen für die horizontale Verschiebung in x -Richtung und des ersten antimetrischen für die horizontale Verschiebung in y -Richtung. Daher enthält der Vektor $\{\underline{\bar{u}}_{\text{relF,sym},0}\}$ in allen Elementen, die einer vertikalen Verschiebung entsprechen, die zugehörigen Fourierglieder der Freifeldverschiebung in vertikaler Richtung, die man aus der Lösung von Gl. (7.12) erhält, während alle übrigen Terme Null sind. Demgemäß sind bei den Vektoren $\{\underline{\bar{u}}_{\text{relF,sym},1}\}$ und $\{\underline{\bar{u}}_{\text{relF,ant},1}\}$ nur die Elemente für $\underline{\bar{u}}$ bzw. $\underline{\bar{v}}$ besetzt, während die Elemente für $\underline{\bar{w}}$ Null sind. Die Matrix $\begin{bmatrix} \underline{\tilde{D}} \\ \underline{\tilde{D}} \end{bmatrix}$ erhält man durch Addition nach Bild 9 aus den Schichtmatrizen $\begin{bmatrix} \underline{\tilde{D}} \\ \underline{\tilde{D}} \end{bmatrix}$ in Anhang A.

Um die Beziehung für das Randelement für nicht-rotationssymmetrische Systeme zu erhalten, wendet man die Transformationsgleichungen für die Randkräfte, Gl. (5.79) und für die Randverschiebungen, Gl. (5.69a), (5.69b) auf die Gleichungen (7.16a-c) an. Addiert man nun noch die einzelnen Kraftanteile aus (7.16a-c), so erhält man zwischen den Randkräften $\{\underline{P}_{0,F}\}$ und den Freifeldverschiebungen die Beziehung:

$$\left\{ \underline{P}_{0,F} \right\} = \begin{bmatrix} \underline{D}_w \\ \underline{D}_u \\ \underline{D}_v \end{bmatrix} \cdot \left\{ \underline{w}_F \right\} + \begin{bmatrix} \underline{D}_u \\ \underline{D}_u \\ \underline{D}_u \end{bmatrix} \cdot \left\{ \underline{u}_F \right\} + \begin{bmatrix} \underline{D}_v \\ \underline{D}_v \\ \underline{D}_v \end{bmatrix} \cdot \left\{ \underline{v}_F \right\} \quad (7.17)$$

mit

$$\begin{bmatrix} \underline{D}_w \\ \underline{D}_w \\ \underline{D}_w \end{bmatrix} = r_0 \cdot \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \underline{S}_0 \\ \underline{S}_0 \\ \underline{S}_0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \underline{\tilde{D}} \\ \underline{\tilde{D}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{S}_0 \\ \underline{S}_0 \\ \underline{S}_0 \end{bmatrix} \quad (7.17a)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{D}_u \\ \underline{D}_u \\ \underline{D}_u \end{bmatrix} = r_0 \cdot \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} \underline{S}_1 \\ \underline{S}_1 \\ \underline{S}_1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \underline{\tilde{D}} \\ \underline{\tilde{D}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{S}_1 \\ \underline{S}_1 \\ \underline{S}_1 \end{bmatrix} \quad (7.17b)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{D}_v \\ \underline{D}_v \\ \underline{D}_v \end{bmatrix} = r_0 \cdot \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_1 \\ \underline{A}_1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \underline{\tilde{D}} \\ \underline{\tilde{D}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_1 \\ \underline{A}_1 \end{bmatrix} \quad (7.17c)$$

Die Matrizen $\begin{bmatrix} \underline{S}_0 \\ \underline{S}_0 \\ \underline{S}_0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \underline{S}_1 \\ \underline{S}_1 \\ \underline{S}_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_1 \\ \underline{A}_1 \end{bmatrix}$ sind die Matrizen $\begin{bmatrix} \underline{S} \\ \underline{S} \\ \underline{S} \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{A} \\ \underline{A} \end{bmatrix}$ nach Abschnitt 5.2.3 für die Fourierglieder $n = 0$ bzw. $n = 1$. Der Vektor $\{\underline{w}_F\}$ enthält für jeden Verschiebungs-Freiheitsgrad in z -Richtung am Rand die der Höhenkoordinate des zugehörigen Punktes entsprechende relative Freifeldverschiebung in z -Richtung, die man aus der Lösung von Gl. (7.12) erhält. Entsprechend werden die Vektoren

$\{\underline{u}_F\}$ und $\{\underline{v}_F\}$ aus den Freifeldverschiebungen in x- und y-Richtung nach Abschnitt 7.1 (Gl. (7.3)) aufgebaut.

Der Vektor $\{\underline{P}_{o,F}\}$ stellt den ersten Anteil der durch die Erdbebenwirkung am vertikalen Rand hervorgerufenen Kräfte dar. Der zweite Anteil entsteht durch die Federungswirkung des Randelements bei Systemen, bei denen das Verschiebungsfeld mit der x- und y-Koordinate veränderlich ist. Dabei setzt sich die gesamte Relativverschiebung $\{\underline{u}_{rel}\}$ am Rand aus den Freifeldverschiebungen und zusätzlichen elastischen Verschiebungen zusammen:

$$\{\underline{u}_{rel}\} = \{\underline{u}_F\} + \{\underline{v}_F\} + \{\underline{w}_F\} + \{\underline{u}_{el}\} \quad (7.18)$$

Der Verschiebungsanteil $\{\underline{u}_{el}\}$ steht mit den in das Randelement eingeleiteten Kräften in Verbindung, so daß gilt:

$$\{\underline{P}_{o,R}\} = \left[\underline{R} \right] \cdot \{\underline{u}_{el}\} \quad (7.19)$$

und damit

$$\{\underline{P}_{o,R}\} = \left[\underline{R} \right] \cdot \left(\{\underline{u}_{rel}\} - \{\underline{u}_F\} - \{\underline{v}_F\} - \{\underline{w}_F\} \right) \quad (7.20)$$

Setzt man nun die beiden Anteile der am vertikalen Rand übertragenen Kräfte nach Gl. (7.17) und (7.20) in die Bewegungsgleichung (7.75a) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \left(-\Omega^2 \cdot \left[\underline{M}_s \right] + \left[\underline{K}_s \right] + \left[\underline{R}^* \right] \right) \cdot \{\underline{u}_{rel}\} \\ & = \Omega^2 \cdot \left[\underline{M}_s \right] \left(\left\{ \underline{e}_x \right\} \cdot \underline{u}_g + \left\{ \underline{e}_y \right\} \cdot \underline{v}_g + \left\{ \underline{e}_z \right\} \cdot \underline{w}_g \right) \\ & \quad + \left(\left[\underline{R}^* \right] - \left[\underline{D}_{u^*} \right] \right) \cdot \{\underline{u}_F^*\} \\ & \quad + \left(\left[\underline{R}^* \right] - \left[\underline{D}_{v^*} \right] \right) \cdot \{\underline{v}_F^*\} \\ & \quad + \left(\left[\underline{R}^* \right] - \left[\underline{D}_{w^*} \right] \right) \cdot \{\underline{w}_F^*\} \end{aligned} \quad (7.21)$$

Der Index * bedeutet, daß die Matrizen bzw. Vektoren durch Auffüllen mit Nullen so erweitert werden, daß sie sich auf alle Frei-

heitsgrade des Finite-Element-Systems beziehen. Als Lösung des Gleichungssystems (7.21) erhält man die Relativverschiebungen $\{\underline{u}_{\text{rel}}\}$. Die Absolutverschiebungen $\{\underline{u}_s\}$ ergeben sich mit Gl. (7.14a-c) zu:

$$\left\{ \underline{u}_s \right\} = \left\{ \underline{u}_{\text{rel}} \right\} + \left\{ e_x \right\} \cdot \underline{u}_g + \left\{ e_y \right\} \cdot \underline{v}_g + \left\{ e_z \right\} \cdot \underline{w}_g \quad (7.22)$$

8. BERECHNUNGSBEISPIELE

8.1 Nachgiebigkeitsfunktionen einer viskoelastischen Schicht

Um eine dreidimensionale Finite-Element-Berechnung mit einer analytischen Lösung vergleichen zu können, wird der Fall einer vertikalen Flächenlast auf einer viskoelastischen Schicht untersucht (Bild 29). Die viskoelastische Schicht ist in horizontaler Richtung unendlich ausgedehnt und wird in der Tiefe H durch den starren Halbraum begrenzt. Die Flächenlast wirkt als Gleichlast auf eine quadratische Fläche der Größe $2b \times 2b$ und ist mit der Zeit harmonisch veränderlich. Für dieses System wurde in /32/ die Lösung durch eine mehrdimensionale Fourier-Transformation gefunden. Danach lassen sich die Ausdrücke für die Verschiebungen an der Oberfläche der Schicht als doppelte Integrale darstellen und numerisch ermitteln.

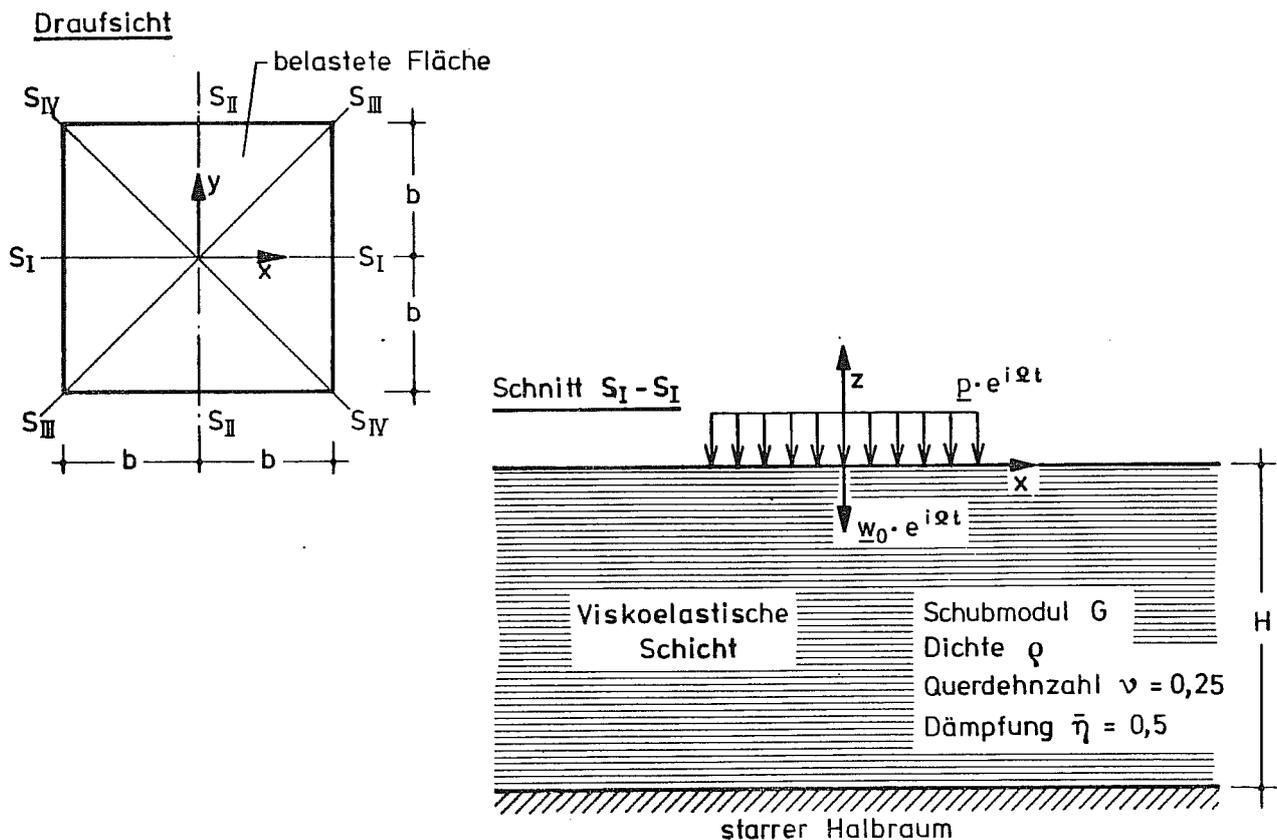


Bild 29: System zur Ermittlung der Nachgiebigkeitsfunktionen

Die harmonisch veränderliche Gleichlast

$$p(t) = \underline{p} \cdot e^{i\Omega t} \quad (8.1)$$

bewirkt im Mittelpunkt der belasteten Fläche die Verschiebung

$$w_0(t) = \underline{w}_0 \cdot e^{i\Omega t} \quad (8.2)$$

Die Beziehung zwischen der Verschiebungsamplitude \underline{w}_0 und der Flächenlast \underline{p} läßt sich wie folgt angeben:

$$\underline{w}_0 = \frac{4 \cdot b}{G} \cdot (f_{1v} - i \cdot f_{2v}) \cdot \underline{p} \quad (8.3)$$

Dabei sind f_{1v} und f_{2v} dimensionslose Größen, die von der bezogenen Frequenz

$$a_0 = \frac{\Omega \cdot b}{V_s} \quad (8.4)$$

abhängen. Sie stellen den Real- bzw. Imaginärteil der dimensionslos gemachten Nachgiebigkeitsfunktion dar.

Für die viskoelastische Schicht gilt das Materialgesetz des viskoelastischen Stoffes. Zwischen der Schubspannung τ und dem Scherwinkel γ besteht dann die Beziehung

$$\tau(t) = (G + G' \cdot \frac{\partial}{\partial t}) \cdot \gamma(t) \quad (8.5)$$

oder

$$\underline{\tau} = \underline{G} \cdot \underline{\gamma} \quad (8.6)$$

mit dem komplexen Schubmodul

$$\underline{G} = G + i \cdot \Omega \cdot G' \quad (8.7)$$

Aufgrund des viskosen Stoffansatzes ist der komplexe Schubmodul (im Gegensatz zum hysteretischen Stoff (Gl. 2.12)) frequenzabhängig. In /32/ wird die Dämpfung durch den dimensionslosen Beiwert

$$\bar{\eta} = \frac{V_S}{b} \cdot \frac{G'}{G} \quad (8.8)$$

beschrieben. Zur Darstellung des viskoelastischen Stoffes durch den Ansatz einer hysteretischen Dämpfung muß also die hysteretische Dämpfungskonstante ξ_h frequenzabhängig eingeführt werden. Aus dem Koeffizientenvergleich der beiden Stoffansätze Gl. (2.12) und (8.7) und mit Gl. (8.8) und (8.4) erhält man:

$$\xi_h = \frac{\bar{\eta}}{2} \cdot a_\omega \quad (8.9)$$

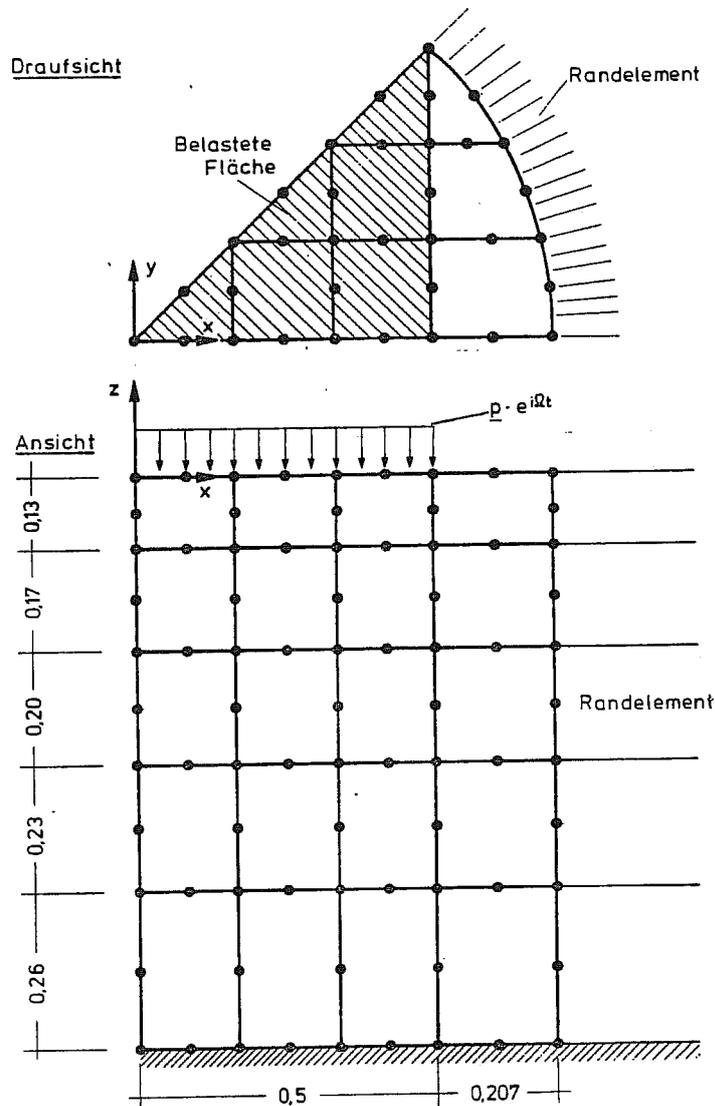
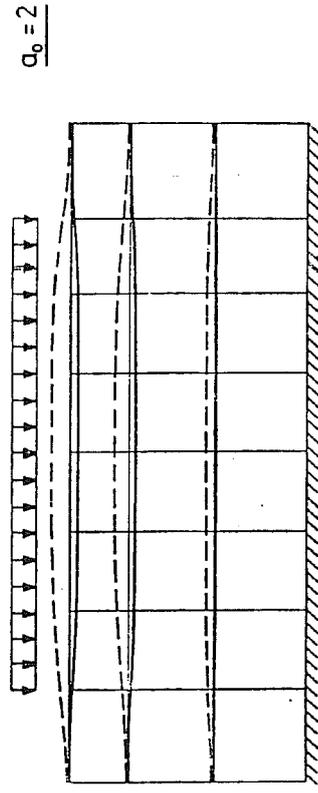
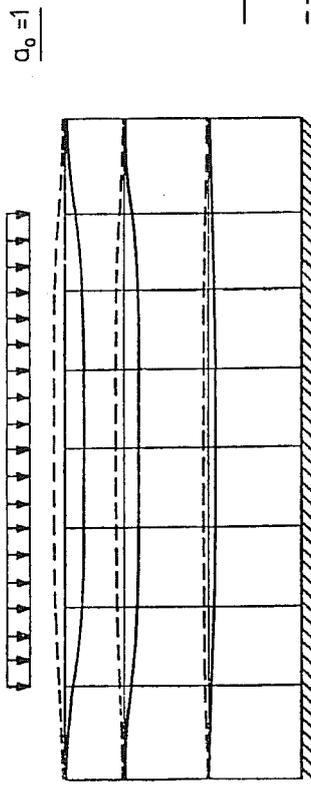
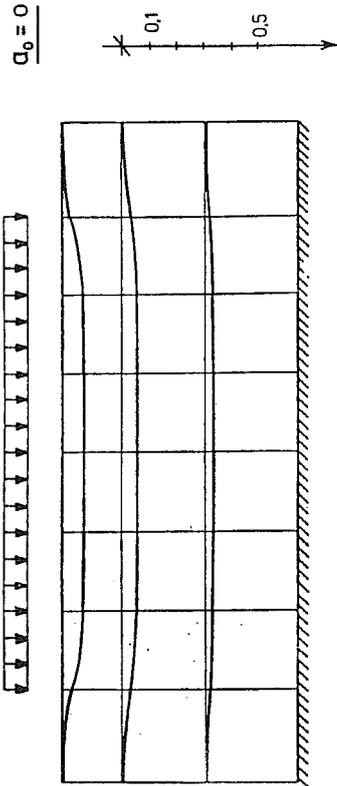
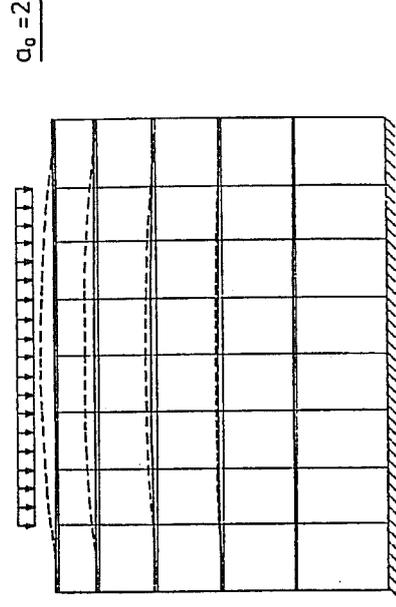
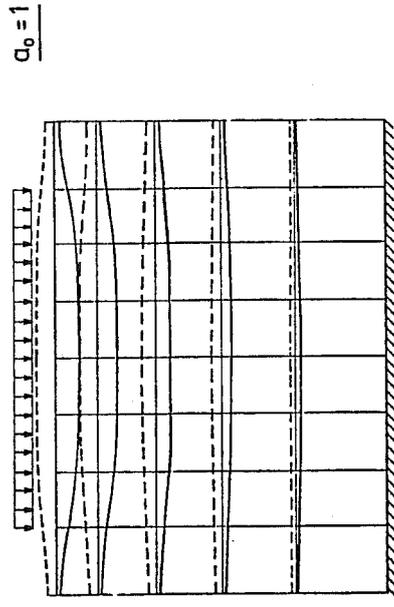
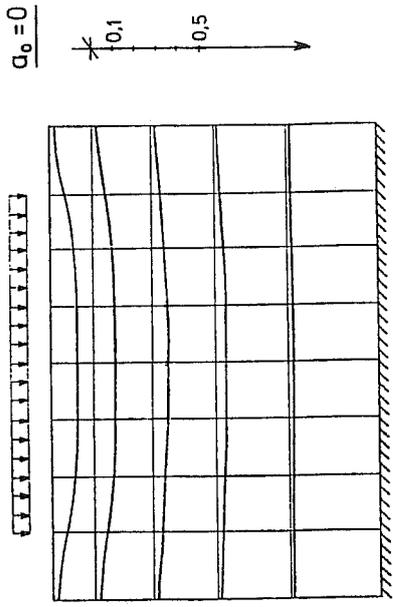


Bild 30: Finite-Element-Modell

Für das dreidimensionale Finite-Element-Modell genügt die Abbildung eines Achtels des vollständigen Systems, da sowohl das System als auch die Belastung vier Symmetrieachsen besitzen. Die Finite-Element-Einteilung mit isoparametrischen Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen für den Fall $H/b = 2$ ist in Bild 30 dargestellt. Für die Berechnungen mit dem Höhenverhältnis $H/b = 1$ wird ein Modell mit den obersten drei Schichten des Modells Abb. 30 verwendet. Das Modell mit dem Höhenverhältnis $H/b = 4$ wird aus dem Modell nach Abb. 30 durch Multiplikation aller z -Koordinaten mit dem Faktor 2 erhalten. Aufgrund der Symmetrie brauchen beim Randelement nach Tabelle 6, Zeile S_4 lediglich die Fourierterme 0, 4, 8, 12, ... berücksichtigt zu werden. Die Berechnungen wurden für die Querdehnzahl $\nu = 0,25$ und den Dämpfungsbeiwert $\bar{\eta} = 0,5$ durchgeführt.

Die aus der Finite-Element-Berechnung erhaltenen Verschiebungen im Schnitt $S_1 - S_1$ (Bild 29) unter der belasteten Fläche sind für einige Frequenzen a_0 in den Bildern 31 bis 33 dargestellt. Aus der Verschiebung \underline{w}_0 des Mittelpunkts der belasteten quadratischen Fläche lassen sich die Nachgiebigkeitsfunktionen f_{1v} und f_{2v} nach Gl. (8.3) ermitteln. Der Vergleich mit den in /32/ angegebenen Funktionen zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen der Finite-Element-Lösung und der analytischen Lösung (Bilder 34-36). Dies gilt insbesondere für die Modelle mit den Höhenverhältnissen $H/b = 1$ und $H/b = 2$. Beim Modell mit $H/b = 4$ führt die Verwendung des größeren Elementnetzes zu einer geringen Abweichung der Finite-Element-Lösung von den genaueren analytischen Funktionen, und zwar insbesondere im Bereich der Resonanzüberhöhung.

Bei der Bildung der Steifigkeitsmatrix der Randelements nach Gl. (6.8) wurden bei den Modellen 1 und 3 ausschließlich die Fourier-Glieder $n = 0$ und $n = 4$ verwendet. Für Modell 2 wurden zwei Berechnungen durchgeführt, und zwar für $n = 0$ und für $n = 0, 4, 8, 12$. Dabei zeigte sich, daß das erste Fourier-Glied mit $n = 0$ von maßgeblichem Einfluß ist und alle weiteren Fourier-Glieder für die Nachgiebigkeitsfunktionen f_{1v} und f_{2v} praktisch vernachlässigbar sind.



— $\text{Re} \left(\frac{G}{4 \cdot b \cdot p} \cdot w_0 \right)$
 - - $\text{Im} \left(\frac{G}{4 \cdot b \cdot p} \cdot w_0 \right)$

Bild 31: Verschiebungen im Schnitt $S_I - S_I$, $H/b = 1$

Bild 32: Verschiebungen im Schnitt $S_I - S_I$, $H/b = 2$

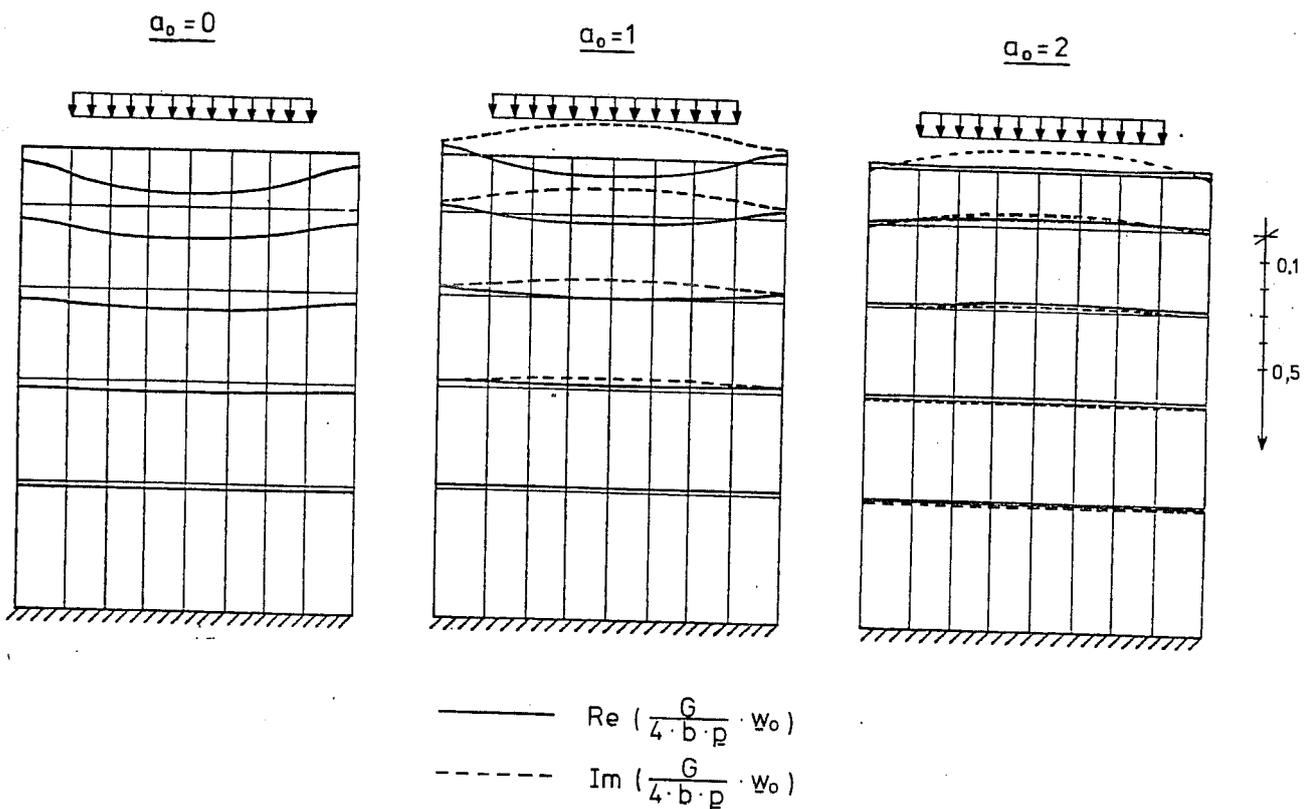


Bild 33: Verschiebungen im Schnitt $S_I - S_I$, $H/b = 4$

Zum Vergleich wurden die Finite-Element-Modelle ohne Randelement berechnet. Die Ergebnisse sind ebenfalls in den Bildern 34-36 dargestellt. Danach nimmt der Einfluß des Randelements mit dem Verhältnis H/b zu. Während bei der sehr flachen Schicht mit $H/b = 1$ die mit und ohne Randelement ermittelten Nachgiebigkeitsfunktionen sich praktisch nicht unterschieden, führt die Vernachlässigung des Einflusses des Randes beim Höhenverhältnis $H/b = 4$ zu völlig anderen Funktionen (Bilder 35 und 36). Auch die näherungsweise Verwendung von Dämpfern nach /17/ als Randelemente kann hierbei nur beschränkt zu einer Verbesserung führen, da beispielsweise die Werte für die Frequenz $a_0 = 0$ davon unbeeinflusst bleiben. Die Verwendung konsistenter Randelemente ist daher für das untersuchte Baugrundmodell im Frequenzbereich $0 < a_0 < 2$ bei Höhenverhältnissen $H/b > 1,5$ erforderlich.

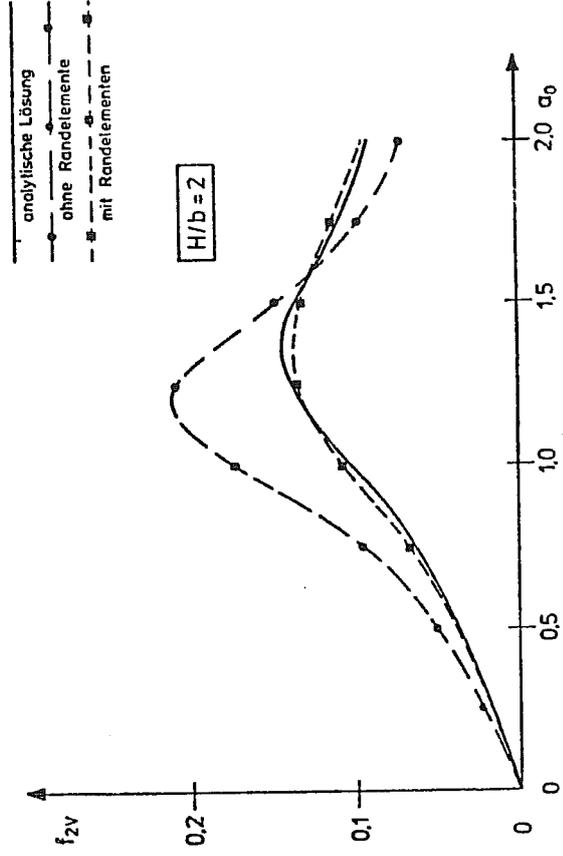
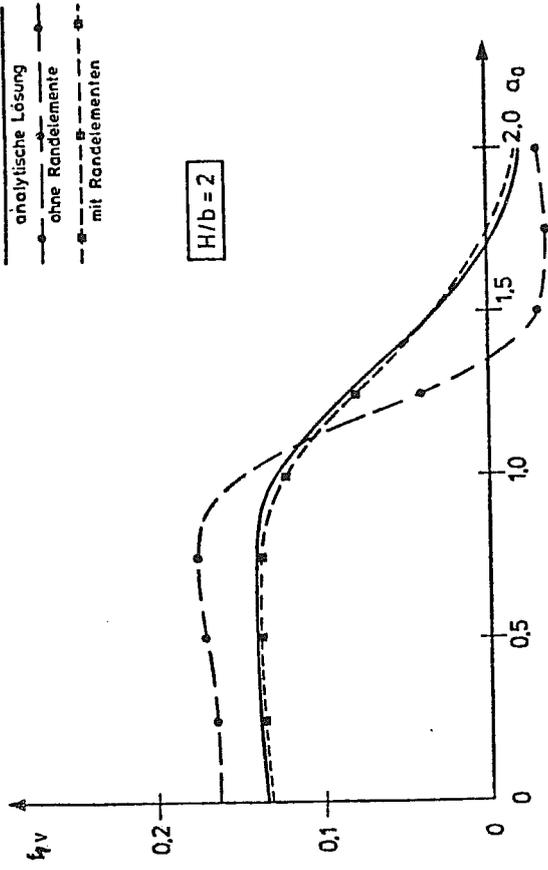


Bild 35: Nachgiebigkeitsfunktionen f_{1v} , f_{2v}

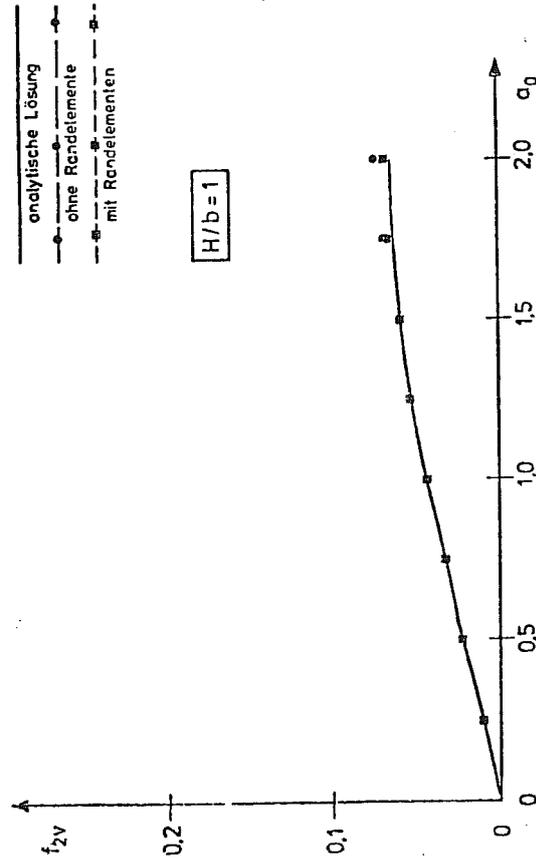
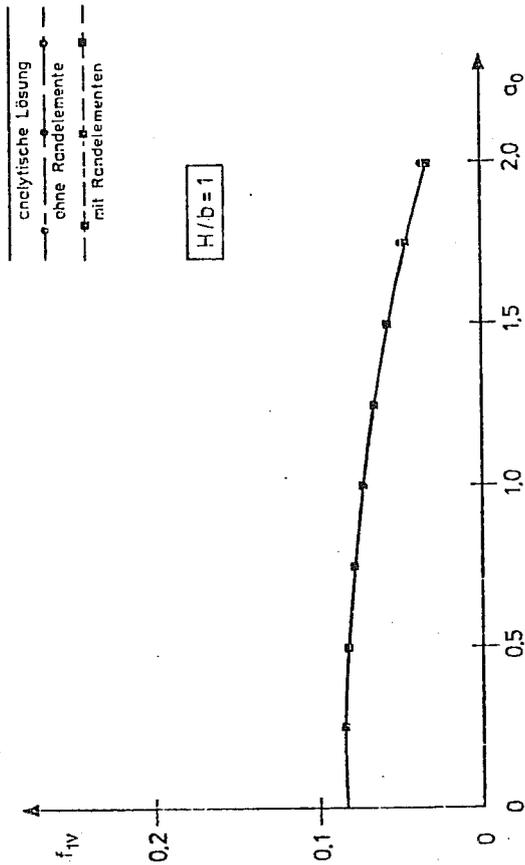


Bild 34: Nachgiebigkeitsfunktionen f_{1v} , f_{2v}

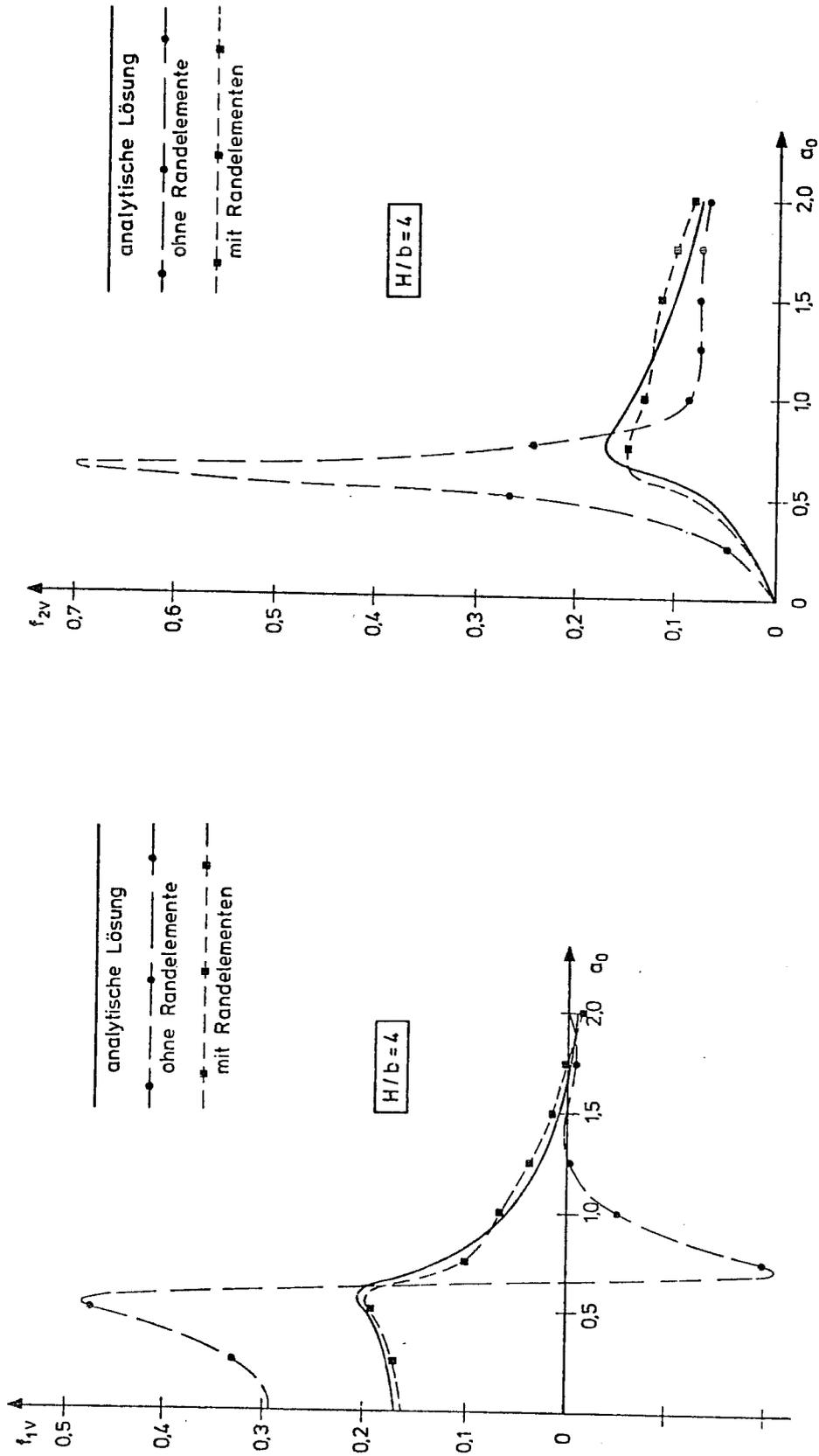


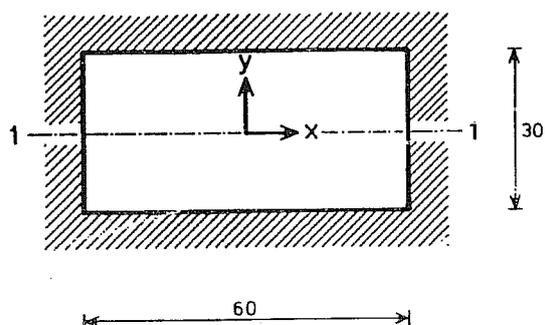
Bild 36: Nachgiebigkeitsfunktionen f_{1v} , f_{2v}

8.2 Erdbebenberechnung eines eingebetteten Bauwerks

8.2.1 Allgemeine Systemeigenschaften

Für ein im Kernkraftwerksbau typisches Anlagegebäude soll der Einfluß der Modellabbildung auf die Übertragungsfunktionen im Lastfall Erdbeben untersucht werden. Es handelt sich um ein Gebäude mit einer rechteckigen Grundfläche von 30 x 60 m, einer Höhe von 20 m und einer Wandstärke von 2 m, das unter Vernachlässigung von Öffnungen als kastenförmiges Bauwerk angesehen werden kann. Das Bauwerk ist bis zu einer Tiefe von 15 m in der Boden eingebettet. Der Baugrund besteht aus einer homogenen Schicht, die in einer Tiefe von 45 m durch eine als starr angenommene Schicht begrenzt wird (Bild 37).

Draufsicht



Abmessungen in [m]

Schnitt 1-1

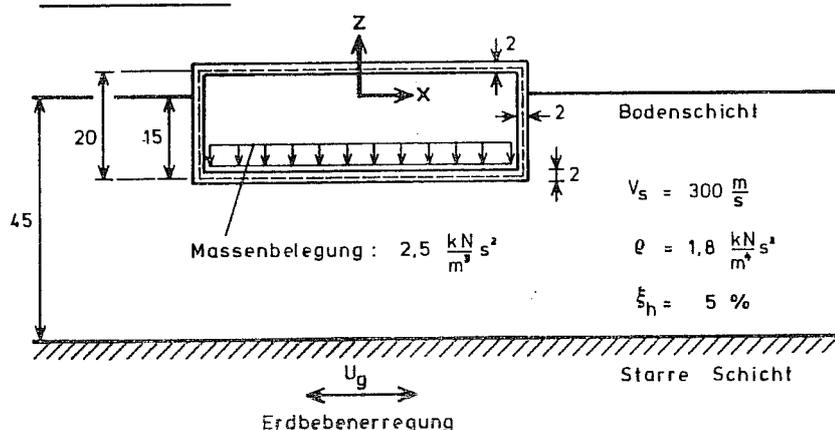


Bild 37: Eingebettetes Anlagegebäude

Für das Bauwerk werden folgende Baustoffkennwerte angesetzt:

Stahlbeton B 25 mit

$$\text{Elastizitätsmodul } E_b = 3 \cdot 10^7 \quad \text{kN/m}^2$$

$$\text{Querdehnzahl } \nu = 0,2$$

$$\text{Baustoffdämpfung } \xi_h = 5\%$$

$$\text{Dichte } \rho = 2,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^4} \text{ s}^2$$

Als baugrunddynamische Kennwerte für den in der homogenen Schicht anstehenden Boden werden zugrunde gelegt:

$$\text{Scherwellengeschwindigkeit } V_s = 300 \text{ m/s}$$

$$\text{Querdehnzahl } \nu = 0,3$$

$$\text{Hysteretisches Dämpfungsmaß } \xi_h = 5\%$$

$$\text{Dichte } \rho = 1,8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^4} \text{ s}^2$$

Die Fundamentplatte ist zur Berücksichtigung von Einbauten mit einer über die Fläche gleichmäßig verteilten Masse von $2,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \text{ s}^2$ belegt.

8.2.2 Modellabbildungen

8.2.2.1 Allgemeines

Die dynamische Berechnung von Bauwerken erfordert zunächst die Abbildung des Gebäudes auf ein mechanisches Modell. Dabei stehen bei Bauwerken, bei denen die Boden-Bauwerk-Wechselwirkung von maßgeblichem Einfluß auf das Schwingungsverhalten ist, zwei Arten der Modellabbildung im Vordergrund:

1. Boden und Bauwerk werden vereinfacht durch ein zweidimensionales Finite-Element-Modell abgebildet. Das Bauwerk kann dabei entweder als zweidimensionales Scheibenmodell oder als Stabwerk dargestellt werden. Der Rand des Elementnetzes muß im

Boden entweder hinreichend weit vom interessierenden Baugrundbereich, d.h. vom zu untersuchenden Bauwerk entfernt sein oder es müssen konsistente zweidimensionale Randelemente verwendet werden.

2. Boden und Bauwerk werden in zwei getrennten Modellen untersucht. Das Bauwerk kann hierbei als Stabwerk oder als Finite-Element-Modell abgebildet werden. Die Kopplung des Baugrunds an das Bauwerk erfolgt durch frequenzabhängige Federn und Dämpfer, die sogenannten Impedanzfunktionen des Fundaments. Diese können entweder aus analytischen Lösungen oder aus einer Finite-Element-Lösung gewonnen werden. Um den Boden durch Federn und Dämpfer abbilden zu können, muß man voraussetzen, daß sich der im Boden eingebettete Teil des Bauwerks als starrer Körper verhält. Dies kann bei den steifen Bauwerken des Kernkraftwerksbaus sowie bei üblichen Hochbauten mit gut ausgesteiften Kellergeschossen nahezu immer angenommen werden. Die Federn und Dämpfer können nach analytischen oder numerischen Verfahren ermittelt werden und sind insbesondere bei eingebetteten Bauwerken und geschichteten Böden fast ausschließlich für kreisförmige Fundamente bekannt. Bei Bauwerken mit nicht-rotationssymmetrischen Fundamenten führt man für jeden Freiheitsgrad der Fundamentverdrehung und -verschiebung einen Ersatzradius ein. Dieser wird so ermittelt, daß für die Translations-Freiheitsgrade die Fläche und für die Rotations-Freiheitsgrade die Flächenträgheitsmomente des tatsächlichen Fundaments und des kreisförmigen Ersatzfundaments gleich sind.

Sowohl die Berechnung mit einem zweidimensionalen Modell als auch die Abbildung des Baugrundes durch an rotationssymmetrischen Modellen ermittelte Federn erfordern bei nicht rotationssymmetrischen Gebäuden Vereinfachungen bei der Modellabbildung. Im allgemeinen ist die Berechnung mit Feder-Dämpfer-Modellen vorzuziehen, da hierbei dreidimensionale Einflüsse erfaßt werden und der Rechenaufwand gegenüber einer zweidimensionalen Finite-Element-Berechnung erheblich geringer ist.

Bei dreidimensionalen Finite-Element-Modellen sind Vereinfachungen, wie sie die Abbildung durch ein zweidimensionales ebenes oder rotationssymmetrisches Modell darstellen, nicht erforderlich. Jedoch ist der Rechenaufwand mit den heutigen Rechenanlagen auch bei Verwendung eines Randelementes erheblich. Für routinemäßige Berechnungen kommen derartige Modelle zur Zeit daher nicht in Betracht. Sie ermöglichen aber anhand von Fallstudien den Einfluß der bei Näherungsverfahren getroffenen Annahmen abzuschätzen. Ein derartiger Vergleich wird im Folgenden für das in Abschnitt 8.2.1 beschriebene Bauwerk durchgeführt.

8.2.2.2 Untersuchte Modellabbildungen

Das in Bild 37 dargestellte Bauwerk wird vergleichsweise mit zwei verschiedenen Modellabbildungen untersucht. Bei der genaueren Berechnung werden Boden und Bauwerk als dreidimensionales Finite-Element-Modell abgebildet (Bild 38). Als vereinfachtes Modell wird ein Stabmodell verwendet (Bild 43). Dazu werden das Bauwerk als Stab und der Baugrund durch Federn und Dämpfer, die an einem rotationssymmetrischen Bodenmodell ermittelt werden, abgebildet. Bei dieser Modellabbildung wird vorausgesetzt, daß sich das Bauwerk wie ein Stab mit Biege- und Schubsteifigkeit verformt und daß die vereinfachte Abbildung des rechteckigen und biegeweichen Fundaments als kreisförmiger und starrer Körper näherungsweise zulässig ist.

Um den Einfluß der Elementdiskretisierung zu untersuchen, werden die Berechnungen für die dreidimensionale Modellabbildung, mit zwei nicht-rotationssymmetrischen Modellen (Modelle 1 und 2, Bilder 38 und 40) durchgeführt. Zur Berechnung der Bodenfedern werden vergleichsweise drei rotationssymmetrische Modelle verwendet (Modelle 1, 2, 3 ; Bilder 44-46).

8.2.2.3 Erdbebenerregung des Systems

Die Schwingungsanregung des Systems greift in der starren Bodenschicht an, die beim Finite-Element-Modell die untere Begrenzung des Systems bildet. Beim Finite-Element-Modell stellt dies eine Fußpunktserregung des Systems nach Abschnitt 7.2 dar. Um auch beim Stabmodell den Angriff der Erregung in der starren Schicht zu berücksichtigen, muß zunächst die an den Bodenfedern angreifende Freifeldbewegung bestimmt werden.

Dies führt zu einem Vorgehen in drei Schritten /36/:

1. Die Fundamentbewegung infolge der seismischen Erregung ist zunächst für ein masseloses Bauwerk zu ermitteln (kinematische Wechselwirkung). Bei einem rotationssymmetrischen eingebetteten starren Fundament wird die Bewegung des Fundaments bei horizontaler Erregung durch eine horizontale Verschiebung und einen Drehwinkel für Kippen um eine horizontale Achse beschrieben. Die Verschiebungsgrößen hängen bei Berechnungen im Frequenzbereich von der Erregerfrequenz Ω ab.
2. Die frequenzabhängigen Bodenfedern und -dämpfer sind für die interessierenden Freiheitsgrade zu bestimmen.
3. Mit den in 2. ermittelten Bodenfedern und -dämpfern und der in 1. ermittelten Erregung ist die Antwortschwingung des Bauwerks zu berechnen.

In /36/ wird gezeigt, daß diese Vorgehensweise, abgesehen von Abweichungen infolge unterschiedlicher numerischer Verfahren, zu den gleichen Ergebnissen führt wie die Berechnung des gesamten Modells in einem einzigen Schritt (Finite-Element-Modell).

Die Erdbebenerregung ist im allgemeinen nicht an der als starr angenommenen unteren Begrenzung des Modells bekannt, sondern an einer von den Bauwerksschwingungen nicht beeinflussten Stelle der freien Oberfläche, dem sogenannten Freifeld. Um auch in diesem Fall

das in Abschnitt 7.2 angegebene Berechnungsverfahren bei Erdbeben-
erregung des Systems anwenden zu können, muß die Beziehung
zwischen der Verschiebung \underline{u}_{FF} der freien Oberfläche und der
Verschiebung \underline{u}_g der starren Schicht bekannt sein. Nimmt man an,
daß die Schwingungserregung im Freifeld durch vertikal
propagierende Scherwellen erfolgt, so läßt sich diese Beziehung für
einen beliebig geschichteten Boden nach Abschnitt 7.1 ermitteln. Für
eine homogene Bodenschicht erhält man sie etwa aus Gl. (7.4) mit
 $\underline{\tau}_0 = 0$, $\underline{u}_{relF} = 0$ zu:

$$\frac{\underline{u}_{FF}}{\underline{u}_g} = \frac{\underline{u}_{relFo} + \underline{u}_g}{\underline{u}_g} = \frac{1}{\cos \underline{\kappa} \cdot h} \quad (8.10)$$

wobei $h = h_s$ die Höhe der Schicht bedeutet und $\underline{\kappa}$ nach Gl. (7.5a)
bestimmt wird. Damit läßt sich nun jede auf die untere starre
Schicht bezogene Übertragungsfunktion

$$\underline{f}_{ug} = \frac{\underline{f}_u}{\underline{u}_g} \quad (8.11a)$$

als auf die freie Oberfläche im Freifeld bezogene Übertragungs-
funktion

$$\underline{f}_{uF} = \frac{\underline{f}_u}{\underline{u}_{FF}} = \frac{\underline{f}_{ug}}{\left(\frac{\underline{u}_{FF}}{\underline{u}_g} \right)} \quad (8.11b)$$

ausdrücken. Für eine homogene viskoelastische Schicht erhält man:

$$\underline{f}_{uF} = \underline{f}_{ug} \cdot \cos \underline{\kappa} h \quad (8.11c)$$

8.2.3 Dreidimensionales Finite-Element-Modell

Das zu untersuchende Bauwerk wird mit dem Boden der visko-
elastischen Schicht in einem dreidimensionalen Finite-Element-Modell
abgebildet. Da Bauwerk und Baugrundmodell zwei Symmetrieachsen

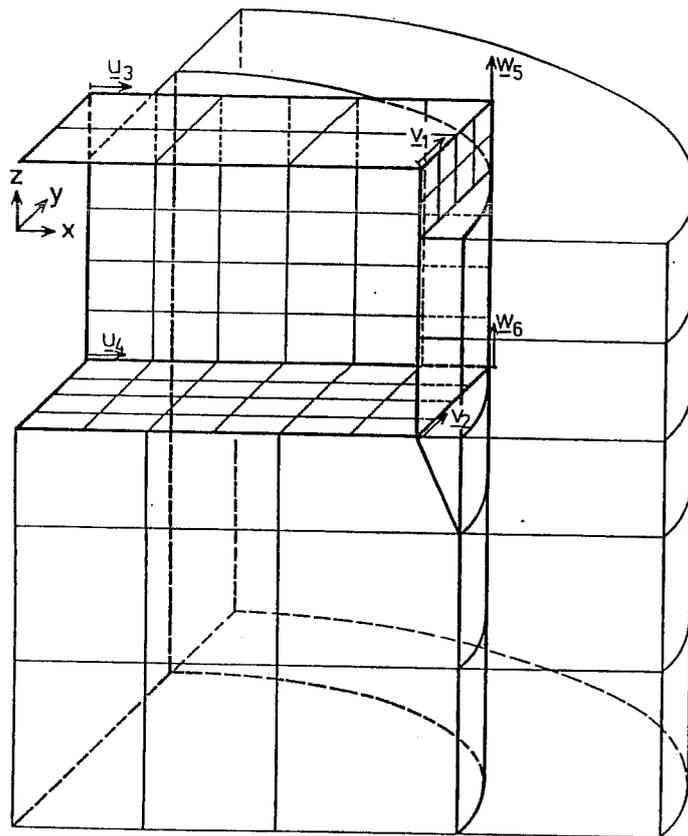


Bild 39: Dreidimensionales Finite-Element-Modell (Modell 1)
- Ansicht

Die Größe der Elemente muß bei dynamischen Baugrundberechnungen so gewählt werden, daß das Verschiebungsfeld elastischer Wellen dargestellt werden kann. Bei linearen Ansatzfunktionen für die Verschiebungen innerhalb eines Elements werden dazu die Elementabmessungen zwischen einem Viertel und einem Achtel der kleinsten interessierenden Wellenlänge angesetzt /3/. Die Abmessungen von Elementen mit quadratischer Ansatzfunktion können aufgrund der höheren Ordnung der Ansatzfunktion entsprechend größer, etwa zwischen der Hälfte und einem Viertel der kleinsten Wellenlänge gewählt werden.

Für Scherwellen ist die kleinste Wellenlänge l_{\min}

$$l_{\min} = \frac{V_s}{f_{\max}},$$

wobei f_{\max} die größte noch zu übertragende Frequenz ist. Für das in Bild 39 dargestellte Finite-Element-Modell kann man damit bei einer maximalen Elementabmessung von 12,5 m einen zulässigen Frequenzbereich von 6 bis 12 Hz abschätzen.

Für die meisten Beschleunigungs-Zeitverläufe von Erdbeben liegen die maßgeblichen Frequenzen im Bereich von 0 bis 10 Hz. Die Berechnungen wurden daher bis zu einer maximalen Frequenz von 12 Hz durchgeführt. Im Frequenzbereich von 12 bis 30 Hz wurde ein linearer Verlauf der Übertragungsfunktionen bis zum Wert 0 bei 30 Hz angenommen.

Um den Einfluß der Elemententeilung auf die Schwingungsantwort des Systems zu überprüfen, wird ein zweites Finite-Element-Modell mit einer gröberen Elemententeilung untersucht. Dabei wird der Boden unterhalb des Bauwerks mit nur zwei Schichten Finiter Elemente abgebildet und das Bauwerk selbst als Stab dargestellt (Modell 2, Bild 40).

Am Rand des zylinderförmigen Baugrundausschnittes ist ein konsistentes Randelement für nicht rotationssymmetrische Systeme nach Abschnitt 5.2 angeordnet. Die Steifigkeitsmatrix des Randelementes wird aufgrund der Symmetriebedingungen für ein Viertel des gesamten Randes aufgestellt. Dabei genügen zur vollständigen Beschreibung der Verschiebungen nach Tabelle 6, Zeile S3 die ungeraden Fourierterme der Winkelfunktionen, die ein zur x-Achse symmetrisches Verschiebungsfeld beschreiben. Beim Aufstellen der Steifigkeitsmatrix werden die Terme $n_{\text{sym}} = 1, 3, 5$ berücksichtigt.

Die Erdbebenerregung greift in der unteren starren Schicht an. Für die freie Oberfläche der elastischen Bodenschicht erhält man nach Abschnitt 7.1 im Freifeld die in Bild 41 und 42 dargestellt Übertragungsfunktion.

Jeder Knotenpunkt des Modells besitzt drei Verschiebungs-Freiheits-

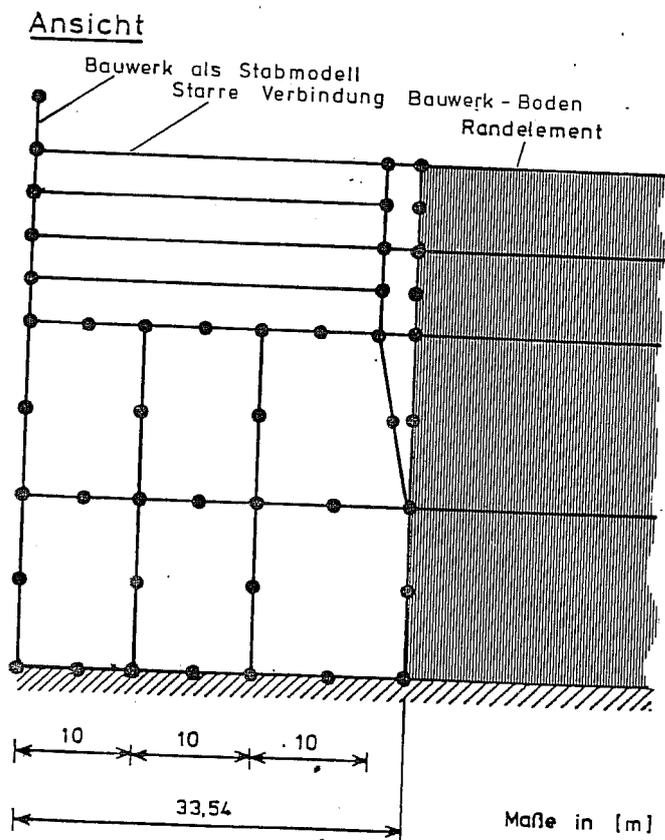
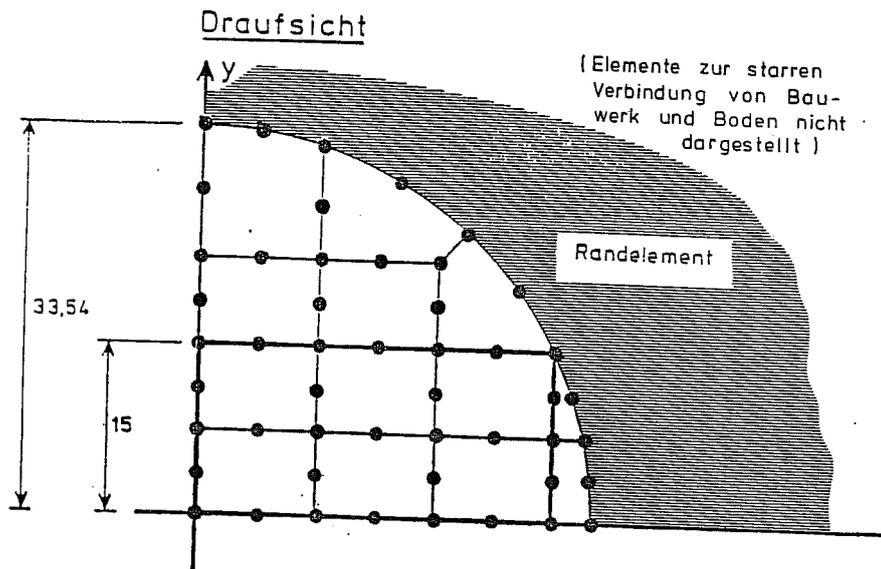


Bild 40: Vereinfachtes dreidimensionales Finite-Element-Modell (Modell 2)

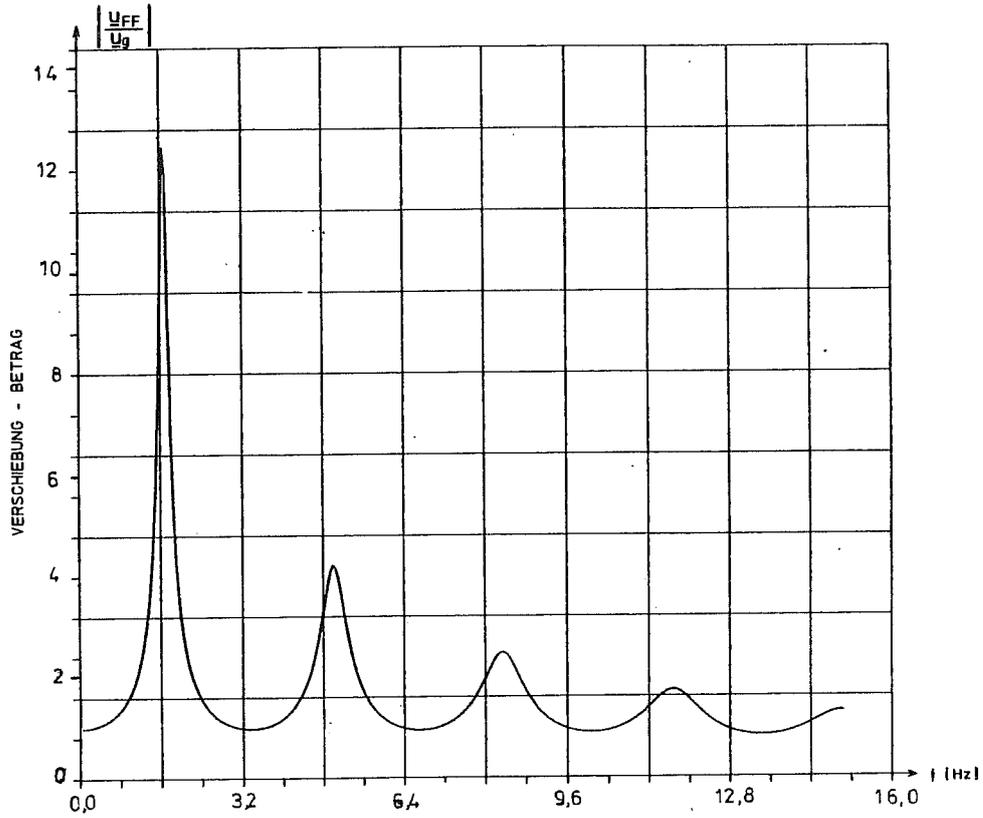


Bild 41: Übertragungsfunktion im Freifeld - Betrag

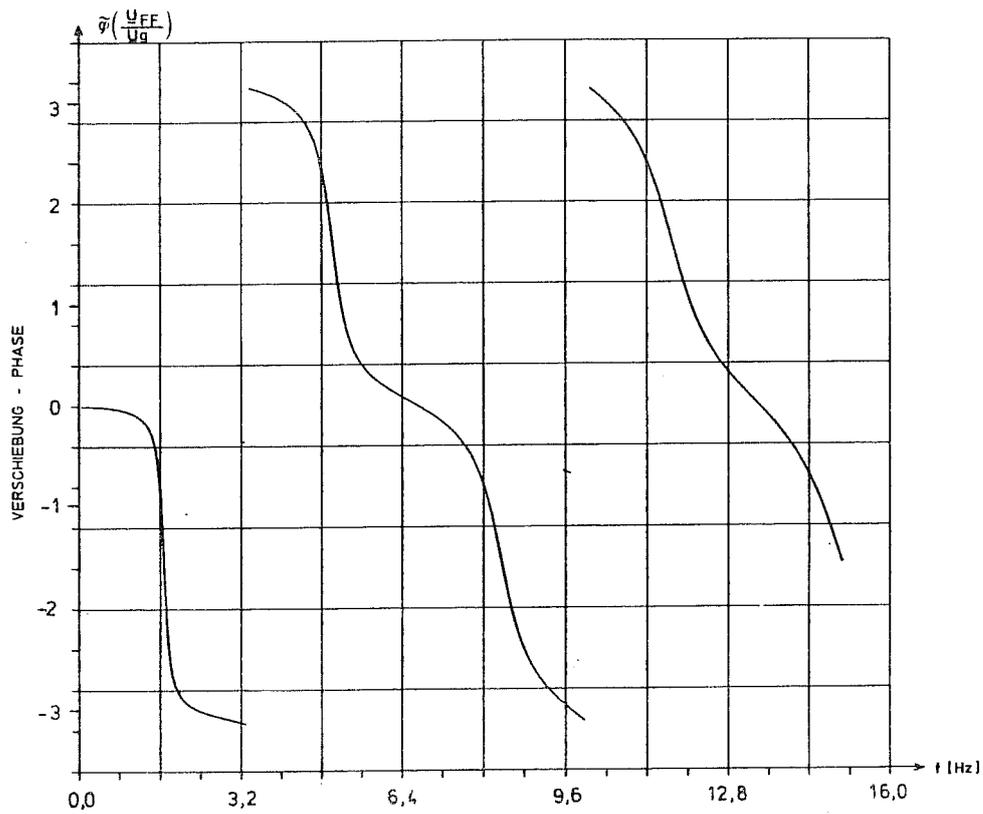


Bild 42: Übertragungsfunktion im Freifeld - Phasenwinkel

grade. Diejenigen Knotenpunkte, die mit den Plattenelementen verbunden sind, haben darüber hinaus noch 3 Verdrehungs-Freiheitsgrade. Bei allen Punkten auf den Symmetrieachsen wurden die zur Berücksichtigung der Symmetriebedingungen notwendigen Freiheitsgrade festgehalten.

Dies führt zu einem Gleichungssystem mit 1066 Unbekannten und einer Bandbreite von 615. Die Bandbreite wurde nicht optimiert.

8.2.4 Stabmodell

Die Abbildung des Anlagengebäudes auf ein Stabmodell erfolgt mit biege- und schubsteifen Balkenelementen. Über Federn und Dämpfer, die im statischen Steifigkeitsschwerpunkt der Gründung angreifen, ist das Bauwerk an den Baugrund gekoppelt (Bild 43). Für die Deckenplatte und die Fundamentplatte werden jeweils eine Translations- und Rotationsmasse eingeführt. Dabei wird bei der Fundamentplatte auch die gleichmäßige Massenbelegung für die Einbauten berücksichtigt.

8.2.5 Erdbebenerregung, Baugrundfederung und -dämpfung beim Stabmodell

Die Erdbebenerregung sowie die Baugrundfedern und -dämpfer für das Stabmodell werden an einem kreisförmigen Fundament ermittelt. Für das untersuchte Rechteckfundament erhält man in den einzelnen Freiheitsgraden folgende Ersatzradien:

Translation $r = 23,94 \text{ m}$

Kippen um die x -Achse $r = 20,34 \text{ m}$

Kippen um die y -Achse $r = 28,80 \text{ m}$

Die Berechnungen werden an einem rotationssymmetrischen Finite-Element-Modell mit der in Bild 45 dargestellten Elemententeilung aus Elementen mit quadratischer Ansatzfunktion und einem Randelement nach /2/ durchgeführt. Die notwendige Elementgröße kann

dabei wie beim nicht-rotationssymmetrischen Modell festgelegt werden (siehe Abschnitt 8.2.3). Um den Einfluß der Elemententeilung nochmals zu überprüfen, wurden für die Berechnungen der Horizontalfeder sowie der Feder für Kippen um die y-Achse drei unterschiedliche Modellabbildungen (Bilder 44 bis 46) verwendet.

Im ersten Schritt werden die Verschiebung und Verdrehung eines masselosen Fundaments bei Erregung des Systems an der starren unteren Begrenzung ermittelt. Die Ersatzradien wurden aufgrund der jeweils angeregten Kippbewegungen bei Erregung in x-Richtung zu $r = 28,8$ m und bei Erregung in y-Richtung zu $r = 20,34$ m gewählt. In den Bildern 47 bis 50 sind die Beträge und Phasenwinkel der Verschiebung und Verdrehung bezogen auf den statischen Steifigkeitschwerpunkt (s.u.) bei einer Fußpunktverschiebung des Systems mit $\underline{u}_g = 1$ für Erdbebenerregung des Systems in y-Richtung dargestellt.

Die Resonanzspitzen der Verschiebung liegen bei den Eigenfrequenzen der 45 m hohen Schicht, die man nach Gl. (7.9) zu

$$\begin{aligned} f_1 &= 1,67 \text{ Hz} \\ f_2 &= 5,00 \text{ Hz} \\ f_3 &= 8,33 \text{ Hz} \end{aligned}$$

erhält. Die so ermittelten Verschiebungen \underline{u}_0 und Verdrehungen $\underline{\varphi}_0$ werden als Fußpunktserregung am Stabwerk angesetzt (Bild 43).

Die frequenzabhängigen Bodenfedern und -dämpfer werden ebenfalls an dem in Bild 45 dargestellten Finite-Element-Modell ermittelt, wobei für die Berechnungen in den einzelnen Freiheitsgraden die jeweils zugehörigen Ersatzradien des Fundaments eingesetzt werden.

Die Beziehung zwischen der auf die Fundamentsohle bezogenen Horizontalkraft \underline{H}_s , dem Kippmoment \underline{M}_s und den zugehörigen Verschiebungsgrößen läßt sich allgemein schreiben zu:

$$\begin{Bmatrix} \underline{H}_s \\ \underline{M}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{xx} & \underline{k}_{x\varphi} \\ \underline{k}_{\varphi x} & \underline{k}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{u}_s \\ \underline{\varphi}_s \end{Bmatrix} \quad (8.12)$$

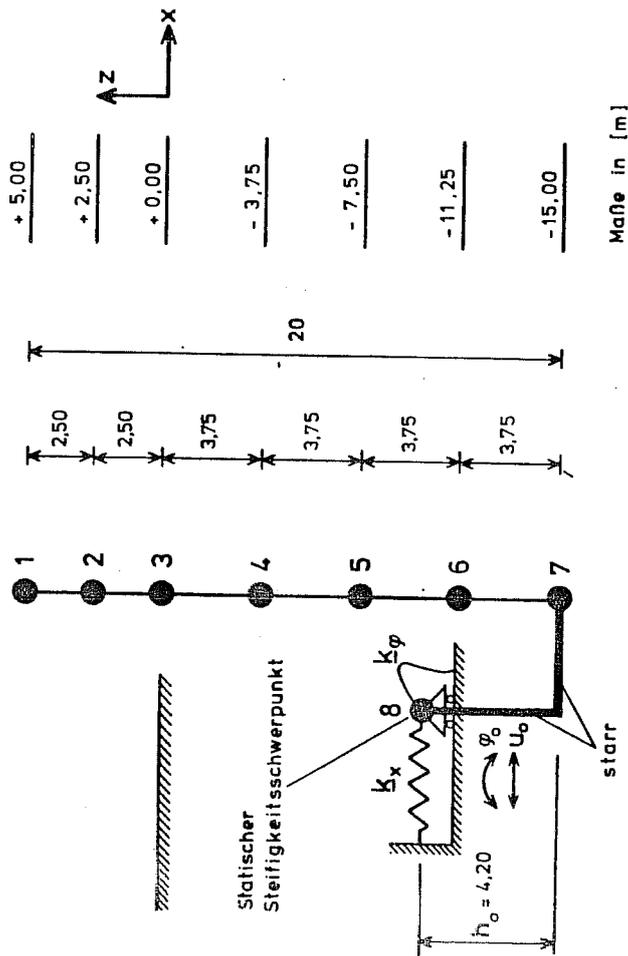
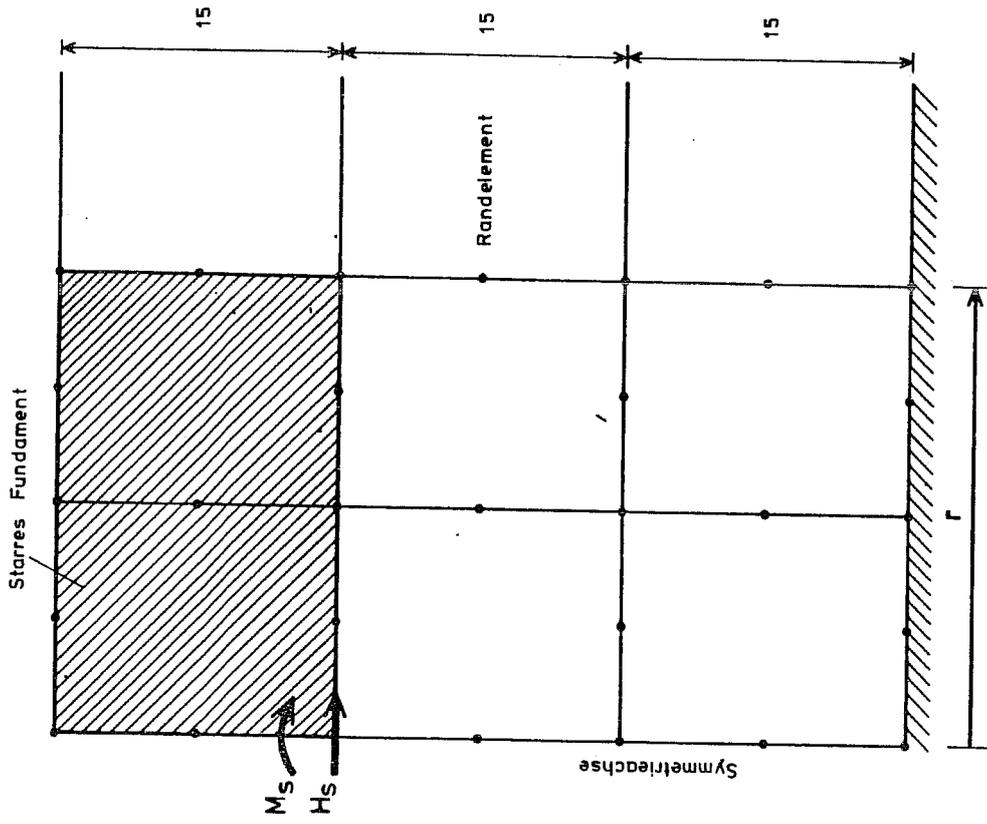


Bild 44: Rotationssymmetrisches Bodenmodell

- Modell 1 -

(Grobe Elemententeilung)

Bild 43: Stabmodell

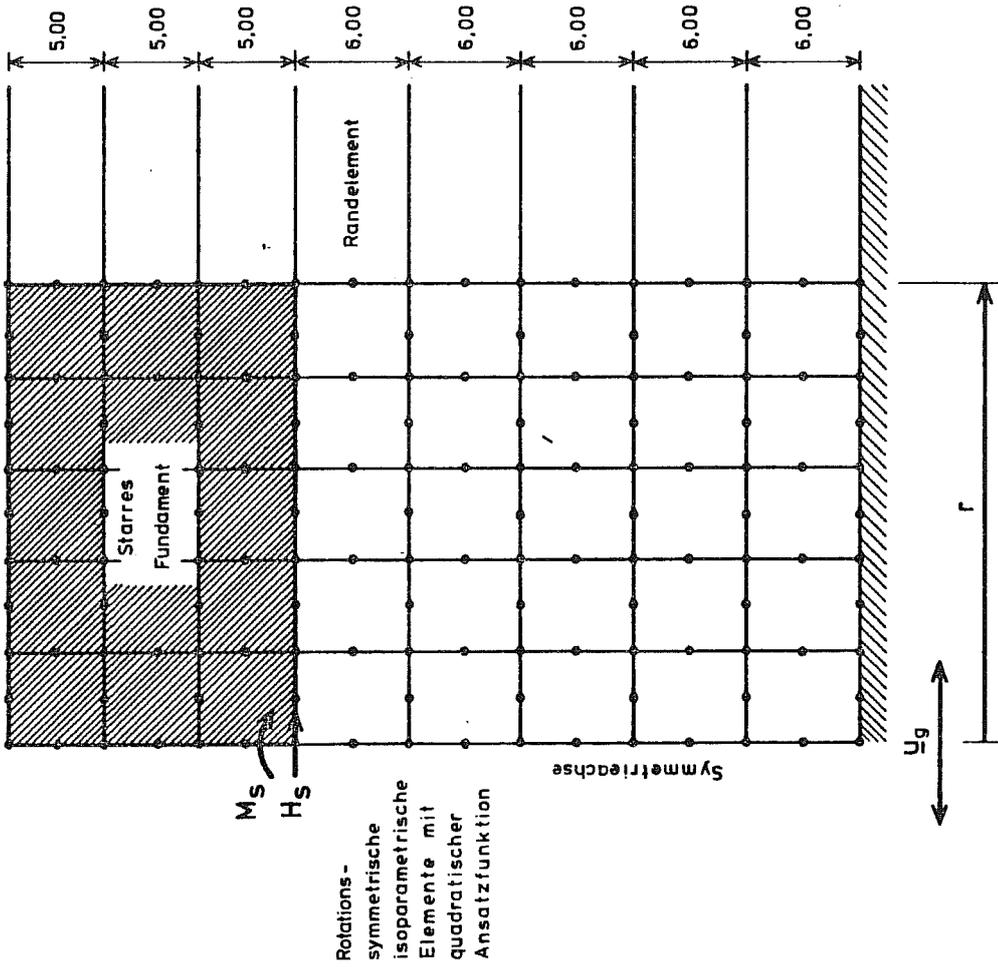


Bild 46: Rotationssymmetrisches Bodenmodell
 - Modell 3 -
 (Feine Elementeinteilung)

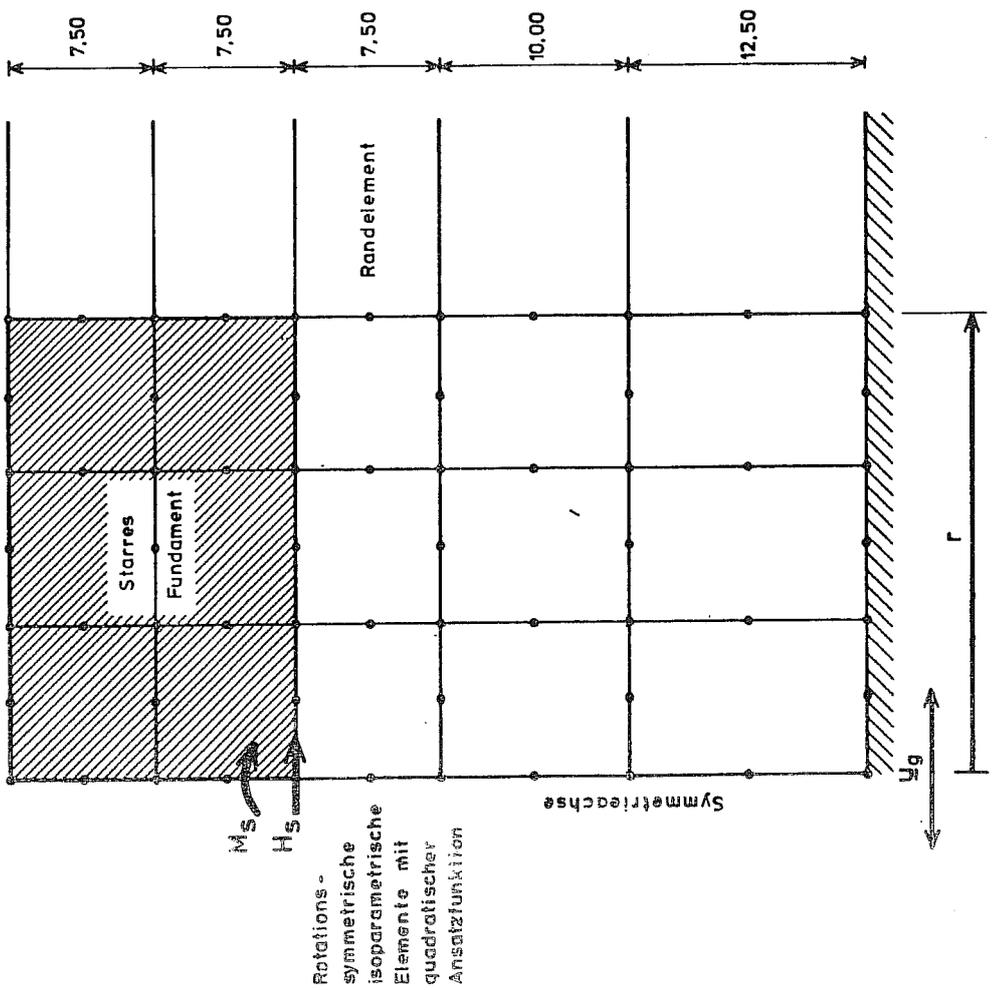


Bild 45: Rotationssymmetrisches Bodenmodell
 - Modell 2 -
 (Normale Elementeinteilung)

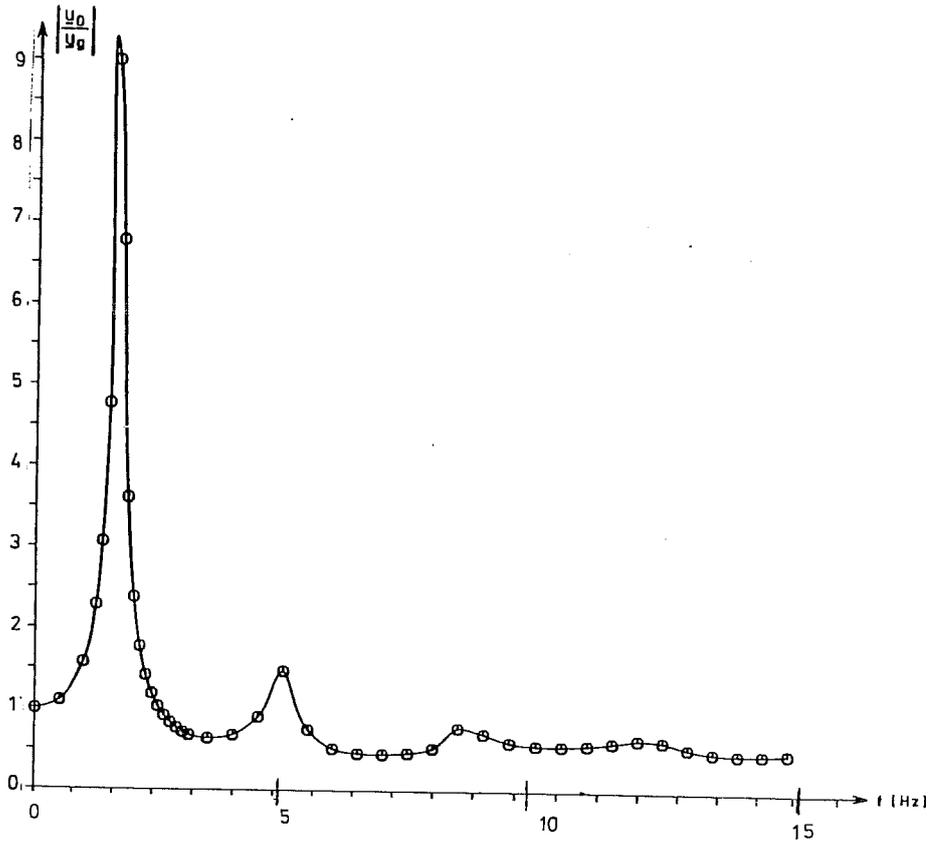


Bild 47: Erdbebenerregung des Stabmodells
 - Betrag der horizontalen Verschiebung in y-Richtung

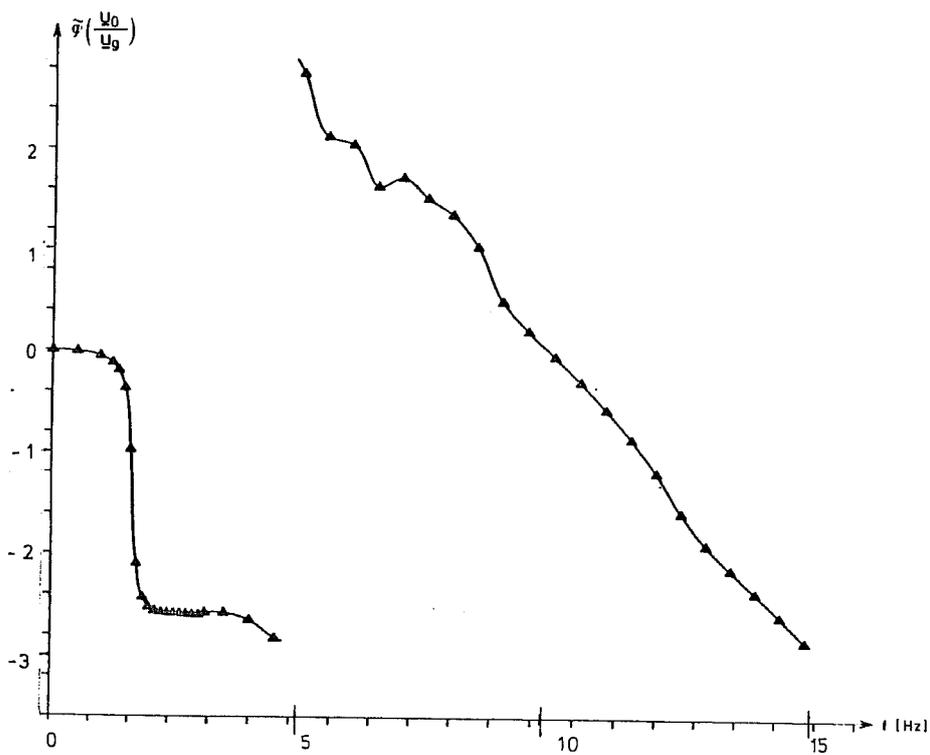


Bild 48: Erdbebenerregung des Stabmodells
 - Phasenwinkel der horizontalen Verschiebung in y-Richtung

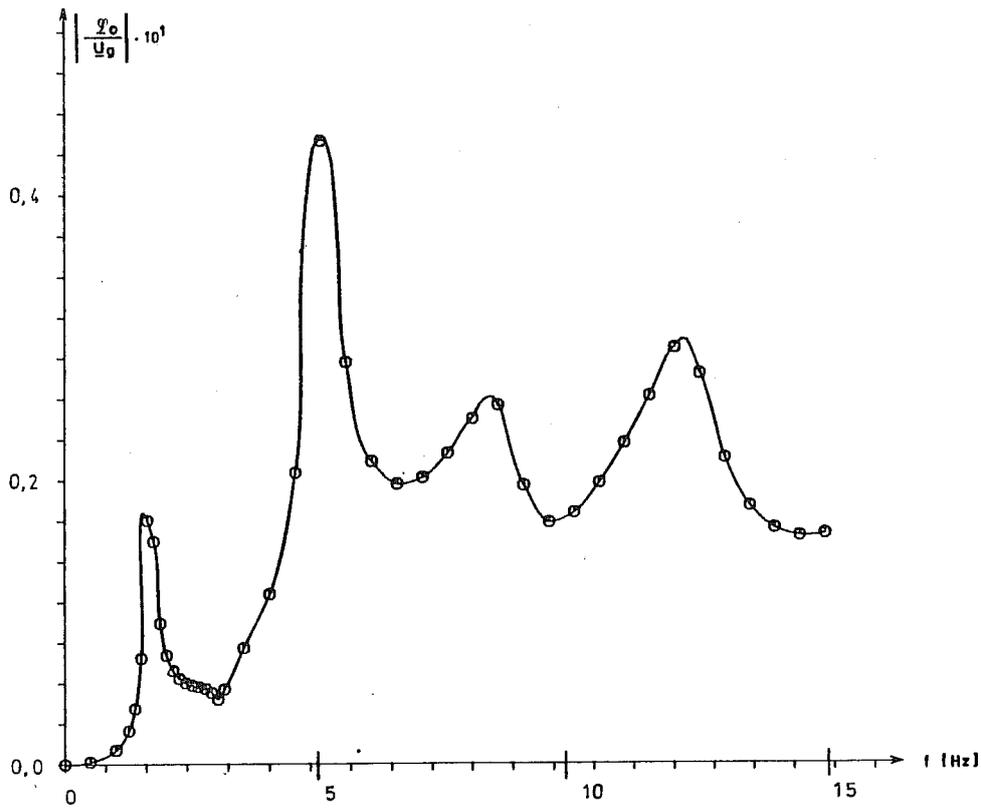


Bild 49: Erdbeberregung des Stabmodells
 - Betrag des Drehwinkels um die x-Achse

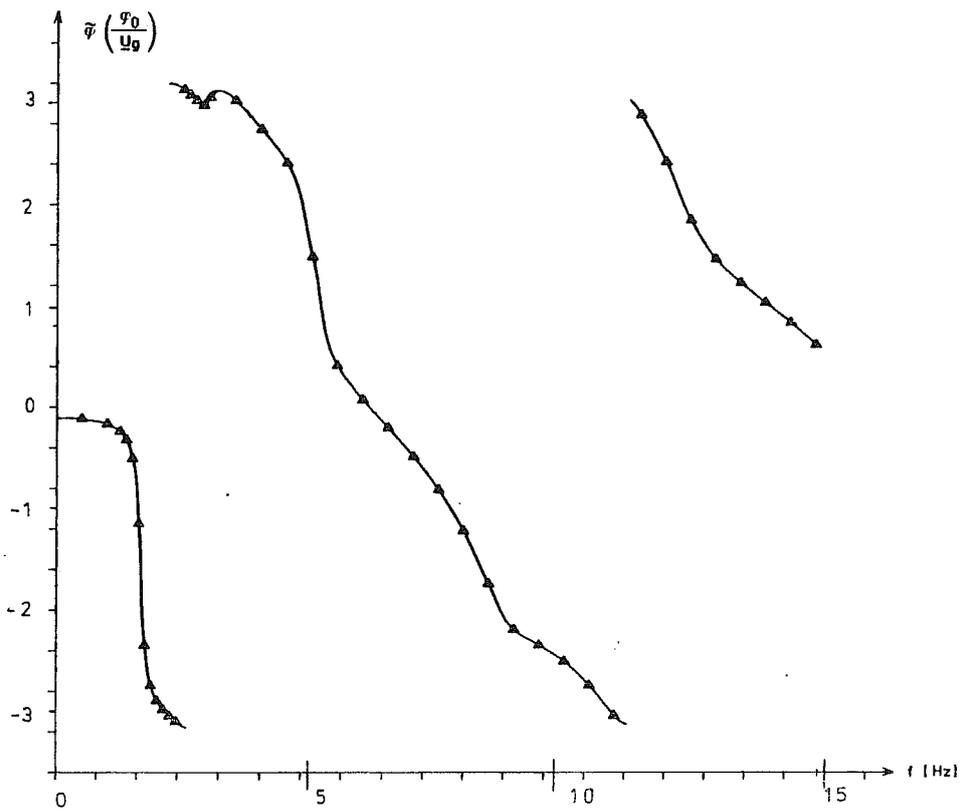


Bild 50: Erdbeberregung des Stabmodells
 - Phasenwinkel des Drehwinkels um die x-Achse

Darin sind \underline{k}_{xx} , $\underline{k}_{\varphi\varphi}$, $\underline{k}_{x\varphi}$ und $\underline{k}_{\varphi x}$ komplexe Größen. Ihr Realteil entspricht der reellen Federkonstante, ihr Imaginärteil der mit der Kreisfrequenz multiplizierten Dämpferkonstante.

Die Matrix in Gl. (8.12) muß symmetrisch sein, d.h. es muß gelten $\underline{k}_{\varphi x} = \underline{k}_{x\varphi}$ (was für $\Omega = 0$ direkt aus dem Maxwell'schen Satz folgt). Da beim Rechteckfundament die "Horizontalfeder" \underline{k}_{xx} und die "Kippfeder" $\underline{k}_{\varphi\varphi}$ ersatzweise an rotationssymmetrischen Bodenmodellen mit unterschiedlichen Radien ermittelt werden, sind die erhaltenen Kopplungsterme $\underline{k}_{x\varphi}$ und $\underline{k}_{\varphi x}$ wegen der Annäherung des rechteckigen Fundaments durch zwei Kreisfundamente mit unterschiedlichen Ersatzradien nicht gleich. Andererseits ist der Einfluß der Kopplungsterme im allgemeinen gering, so daß - um eine symmetrische Matrix zu erhalten - beispielsweise mit dem Mittelwert aus beiden Werten als Kopplungsterm weitergerechnet werden kann.

Im statischen Fall lassen sich der Verschiebungs- und der Verdrehungsfreiheitsgrad vollständig entkoppeln, wenn man den Bezugspunkt in den statischen Steifigkeitsschwerpunkt legt. Dieser liegt in der Höhe

$$\underline{h}_0 = \frac{\underline{k}_{x\varphi}}{\underline{k}_{xx}} \quad (8.13)$$

über der Fundamentsohle. Die auf den Steifigkeitsschwerpunkt bezogene Beziehung zwischen Kraft- und Weggrößen lautet dann /38/:

$$\begin{Bmatrix} \underline{H}_0 \\ \underline{M}_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{xo} & 0 \\ 0 & \underline{k}_{\varphi o} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \end{Bmatrix} \quad (8.14)$$

mit

$$\underline{k}_{xo} = \underline{k}_{xx} \quad (8.14a)$$

$$\underline{k}_{\varphi o} = \underline{k}_{\varphi\varphi} - \frac{\underline{k}_{x\varphi}^2}{\underline{k}_{xx}} \quad (8.14b)$$

Bei Frequenzen, die ungleich Null sind, wird \underline{h}_0 nach Gl. (8.12) komplex. Im allgemeinen berücksichtigt man bei praktischen Berechnungen nur den Realteil von h_0 und erreicht damit die Entkopplung von Horizontal- und Kippfeder.

Für das untersuchte Fundament sind die nach Gl. (8.14a) und (8.14b) ermittelten komplexen Horizontal- und Kippfedern in den Bildern 51 bis 56 dargestellt. Da mit einem kreisförmigen Ersatzfundament gerechnet wurde, sind die Impedanzfunktionen für horizontale Verschiebungen in x- und y-Richtung gleich, während sich wegen der unterschiedlichen Flächenträgheitsmomente des Fundaments um die x- und y-Achse für die Kippfreiheitsgrade unterschiedliche Funktionen ergeben.

Die Horizontalfeder sowie die Kippfeder um die y-Achse wurden zusätzlich mit dem gröberen und feineren Elementnetz der Modelle 1 und 3 (Bilder 44 und 46) berechnet. Die damit erhaltenen komplexen Federn \underline{k}_{x0} und $\underline{k}_{\varphi 0}$ sind ebenfalls in den Bildern 51 bis 54 dargestellt. Auch bei dem verhältnismäßig groben Modell 1 nach Bild 44 ist die Übereinstimmung mit dem verwendeten Modell 2 bis zu Frequenzen von $f \approx 9$ Hz gut. Bei Modell 3 mit der verhältnismäßig feinen Elemententeilung reicht die Übereinstimmung über den gesamten untersuchten Frequenzbereich bis ca. 15 Hz. Die Elementdiskretisierung des den weiteren Berechnungen zugrundeliegenden Modells 2 ist daher im gesamten Frequenzbereich hinreichend genau.

In den Bildern 57 und 58 sind die Real- und Imaginärteile von H bezogen auf die Einbettungstiefe $E = 15$ m aufgetragen. Die Lage des statischen Steifigkeitsschwerpunktes ergibt sich danach sowohl für Kippen um die x- als auch um die y-Achse bei $H/E = 0,28$. Diese Lage des Steifigkeitsschwerpunktes wurde näherungsweise für alle Frequenzen beibehalten. Die Näherung ist im Bereich bis zu 5 Hz gut geeignet. Bei höheren Frequenzen weisen die Funktionen H/E Schwankungen auf, so daß eine Entkopplung der Horizontal- und Kippfeder auch bei Bezug auf den statischen Steifigkeitsschwerpunkt nicht gegeben ist. Näherungsweise können diese Schwankungen jedoch vernachlässigt werden, da die Kopplungsterme im allgemeinen nur geringen Einfluß haben.

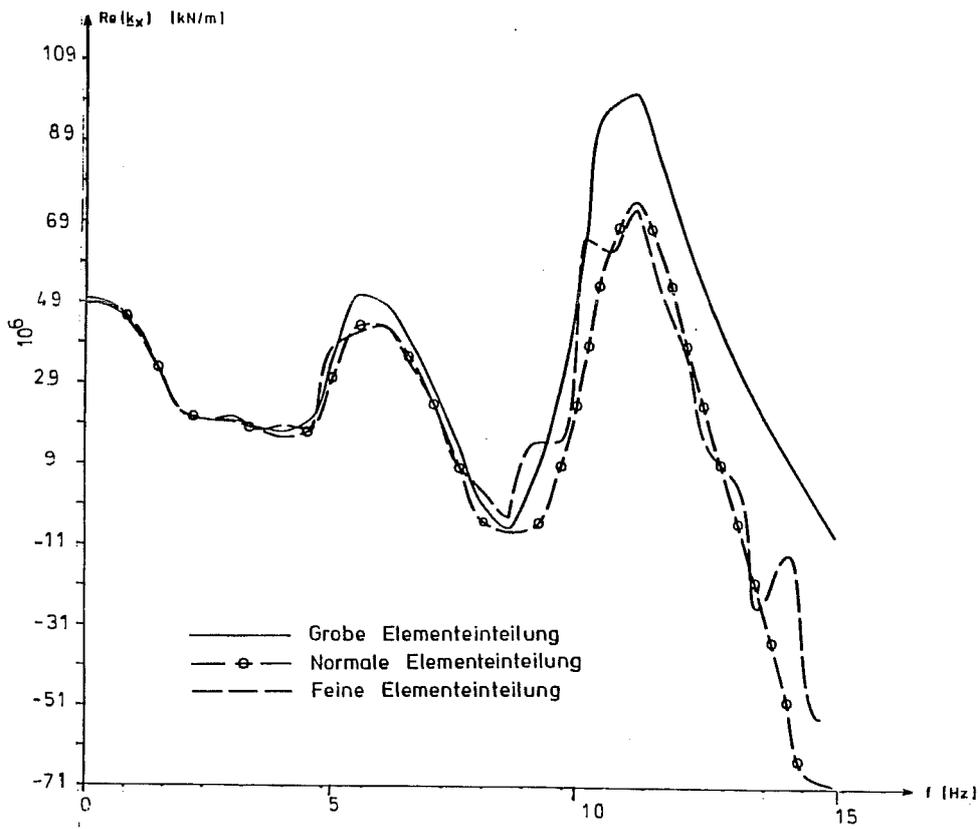


Bild 51: Komplexe Bodenfedern für horizontale Verschiebungen
- Realteil -

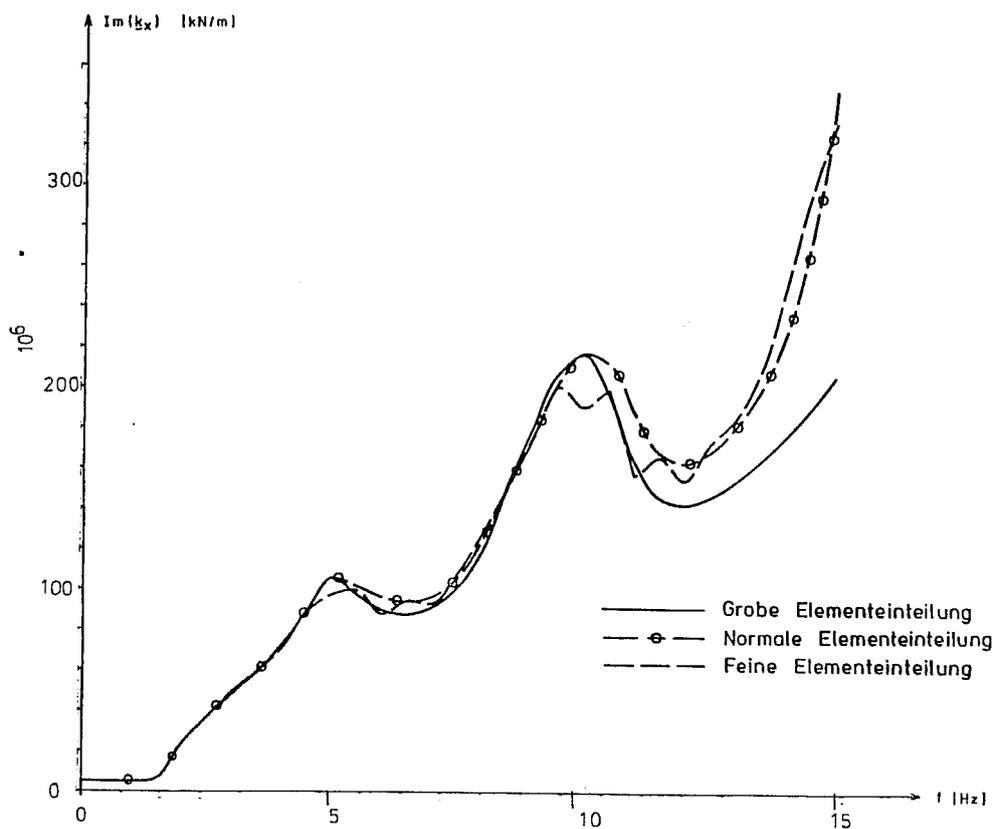


Bild 52: Komplexe Bodenfedern für horizontale Verschiebungen
- Imaginärteil -

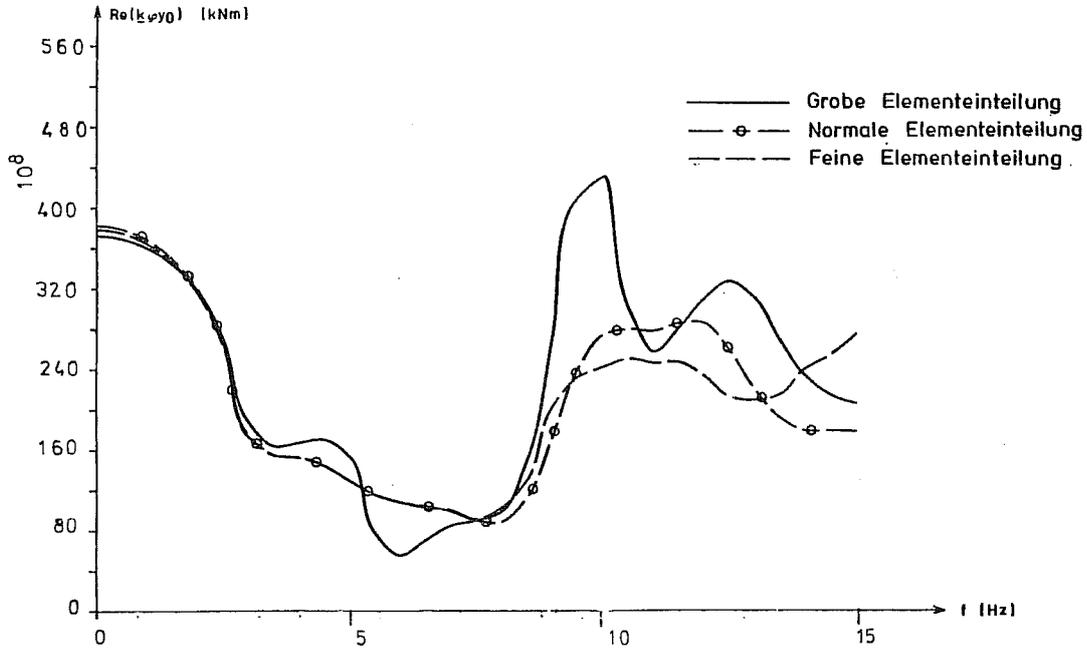


Bild 53: Komplexe Bodenfeder für Kippen um die y-Achse
($r = 28,80$ m) - Realteil -

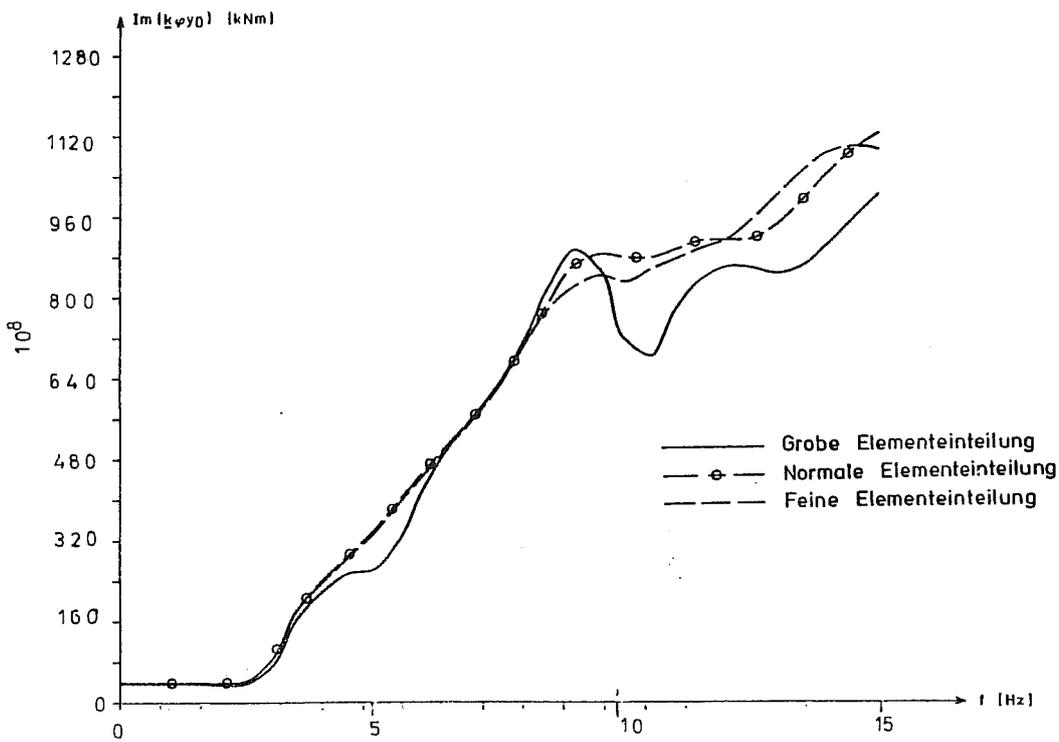


Bild 54: Komplexe Bodenfeder für Kippen um die y-Achse
($r = 28,80$ m) - Imaginärteil -

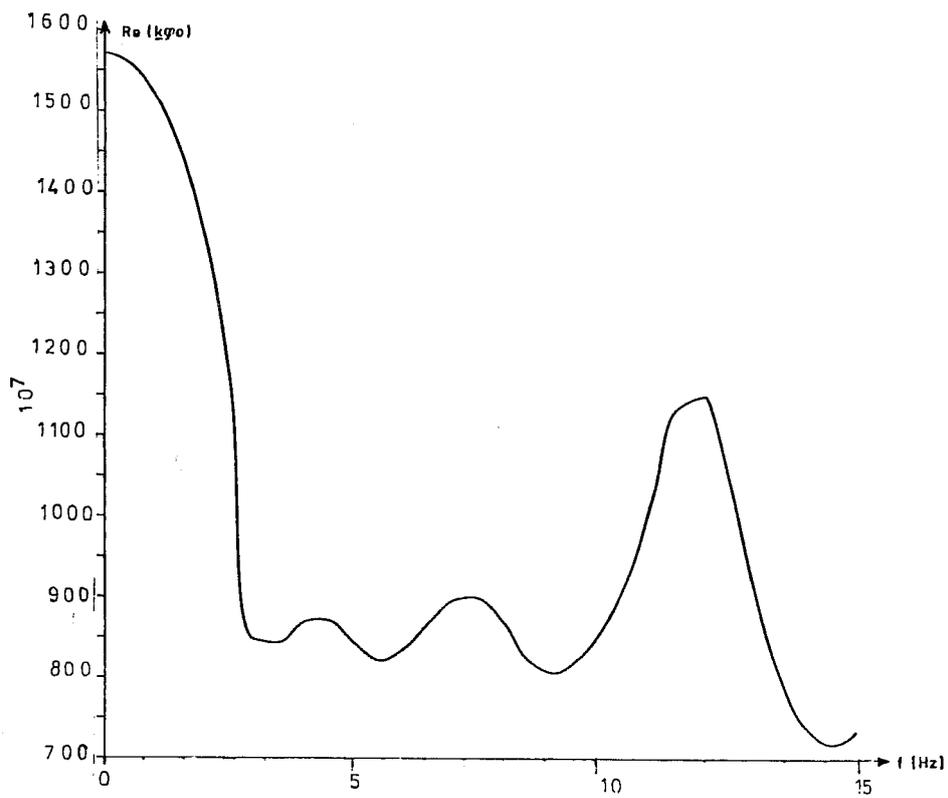


Bild 55: Komplexe Bodenfeder für Kippen um die x-Achse
($r = 20,34$ m) -Realteil -

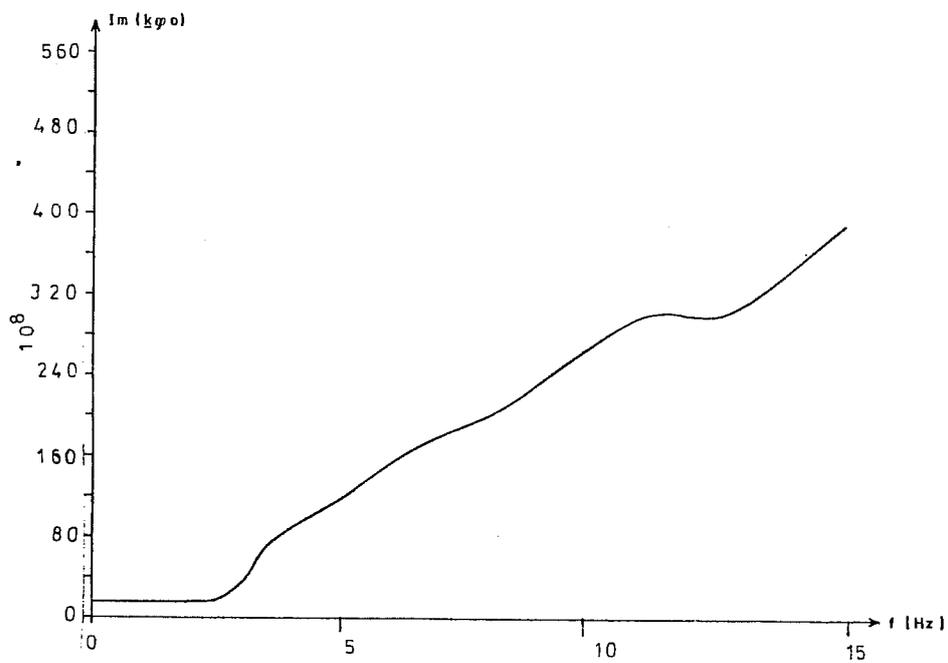


Bild 56: Komplexe Bodenfeder für Kippen um die x-Achse
($r = 20,34$ m) -Imaginärteil -

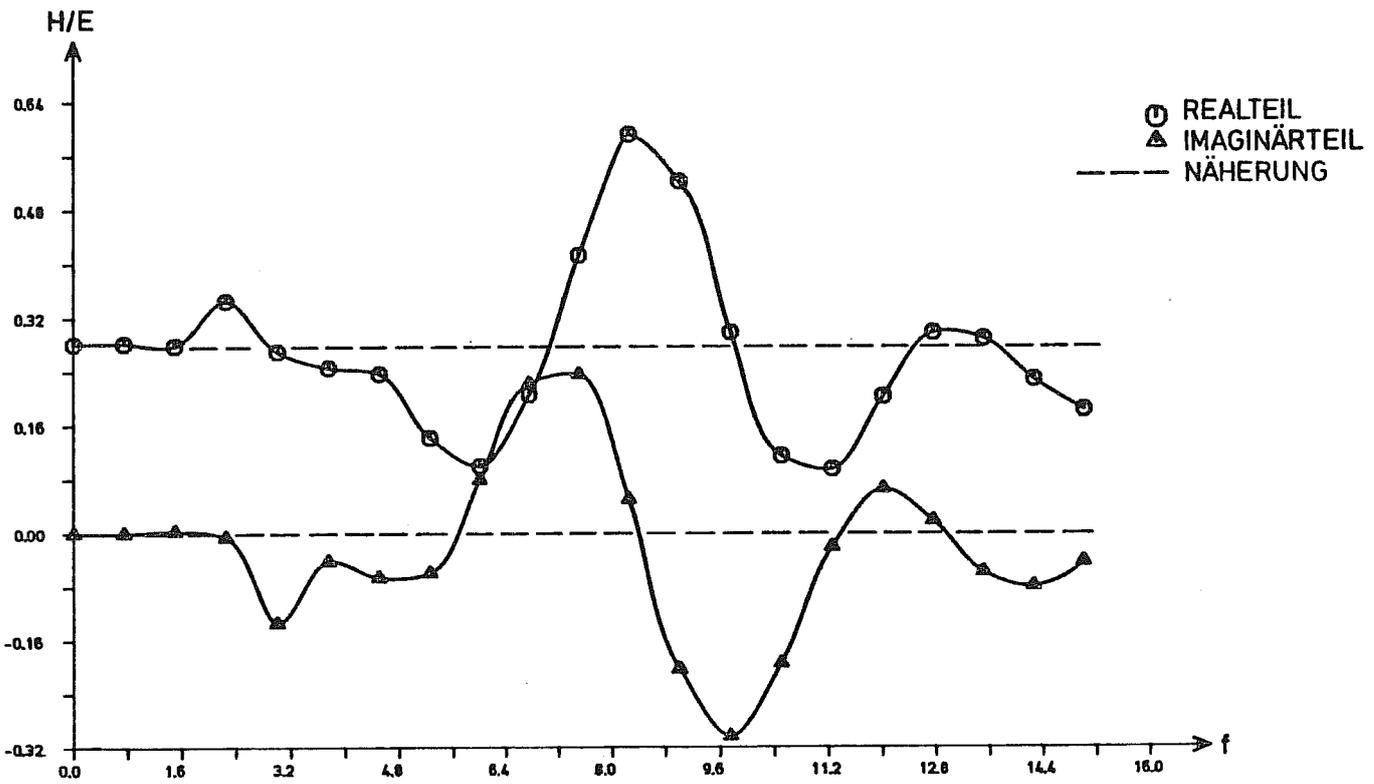


Bild 57: Verhältnis H/E bei Erdbebenanregung in x -Richtung
 ($r = 28,80$ m)

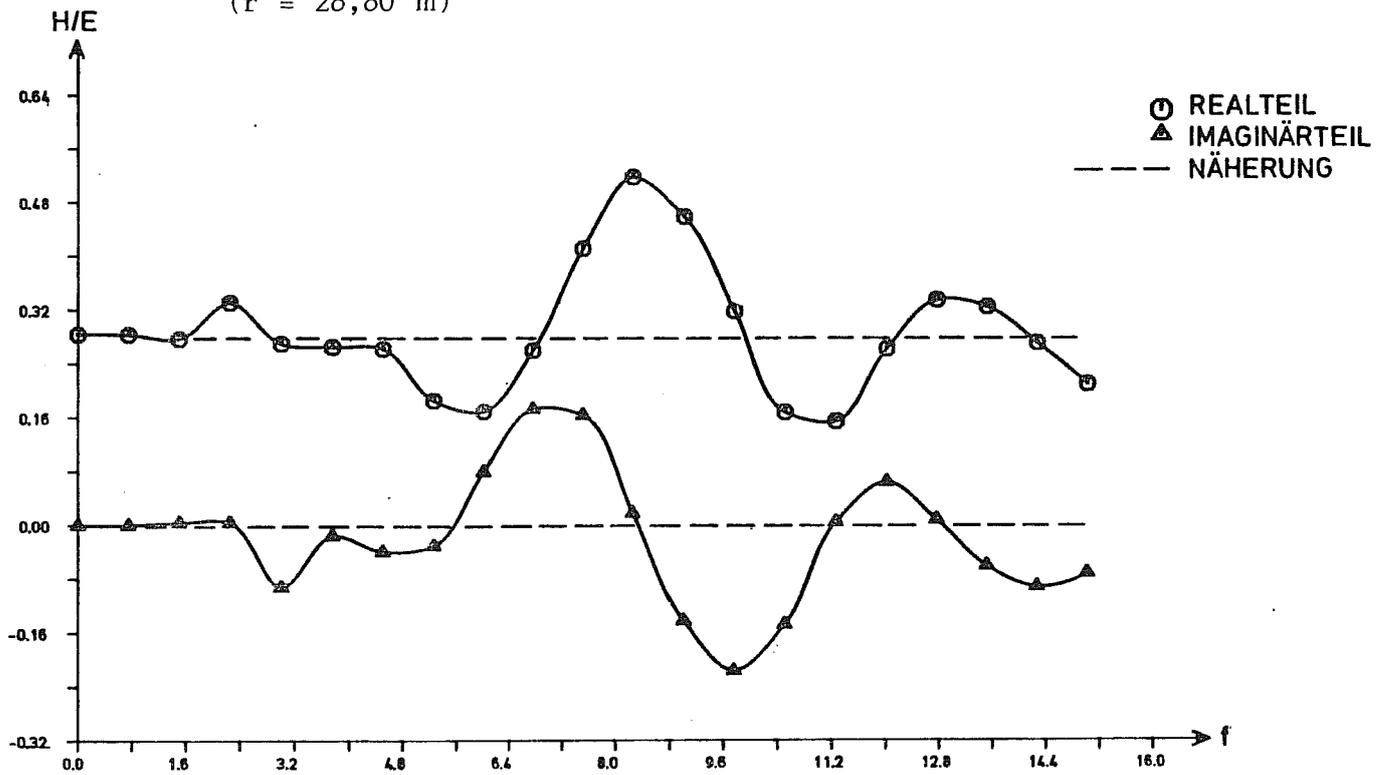


Bild 58: Verhältnis H/E bei Erdbebenanregung in y -Richtung
 ($r = 20,34$ m)

8.2.6 Übertragungsfunktionen

8.2.6.1 Allgemeines

Zur Beurteilung des dynamischen Verhaltens der Modelle werden ihre Übertragungsfunktionen, d.h. ihre Antwortschwingungen bei harmonischer Erregung, in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ untersucht. Sie sind für den Vergleich des Schwingungsverhaltens beider Modelle besser geeignet als beispielsweise Zeitverlaufsberechnungen, da sie nur von den untersuchten Systemen und der Art der Erregung, nicht aber vom Frequenzgehalt der Erregerfunktion abhängen.

Die Übertragungsfunktionen werden für die Verschiebungen und Verdrehungen der Decke und Bodenplatte aufgestellt. Beim Finite-Element-Modell werden als Bezugspunkte zur Beschreibung des globalen Verhaltens von Decke und Bodenplatte die Mittelpunkte der jeweils angrenzenden Wandscheiben ausgewählt (Punkte 1 bis 4, Bild 39). Die Drehwinkel werden durch Division der Vertikalverschiebungen in den Eckpunkten (Punkte 5, 6, Bild 39) durch den Abstand des Eckpunktes zur x- bzw. y-Achse bestimmt. Beim Stabmodell sind die globalen Verschiebungen und Verdrehungen von Decke und Bodenplatte durch die Verschiebungen und Verdrehungen der Knotenpunkte 1 und 7 (in Bild 43) unmittelbar gegeben.

8.2.6.2 Übertragungsfunktionen der dreidimensionalen Finite-Element-Modelle

Um den Einfluß der Elementdiskretisierung zu prüfen, wurden Übertragungsfunktionen für die beiden in Bild 38 und 40 dargestellten dreidimensionalen Finite-Element-Modelle bestimmt. Als Belastung wurde eine in Deckenmitte angreifende Einzellast $\underline{P}_x = 1 \text{ [kN]}$ in x-Richtung (Lastfall 1) und eine Fußpunktserregung in der starren unteren Schicht angenommen (Lastfall 2). Im ersten Lastfall wird das Schwingungsverhalten des Systems maßgeblich von der Boden-Bauwerk-Wechselwirkung bestimmt, während im zweiten Fall der Einfluß der Schwingungsübertragung durch die elastische Boden-

schicht hinzukommt.

Die für die Decke des Bauwerks berechneten Verschiebungen in x -Richtung und Verdrehungen um die y -Achse sind, ausgedrückt durch Betrag und Phasenwinkel, in den Bildern 59 bis 64 zusammengestellt. Die horizontalen Verschiebungen weisen bei Belastung mit einer Einzellast eine deutliche Resonanzspitze bei ca. 1,6 Hz auf. Im Lastfall Erdbebenerregung wird das Übertragungsverhalten der elastischen Schicht für die Horizontalverschiebungen bestimmend. Die Resonanzspitzen liegen hier bei den Eigenfrequenzen der elastischen Schicht. Im Frequenzbereich von 0 bis 5 Hz sind die Unterschiede der für beide Modelle erhaltenen Übertragungsfunktionen der Horizontalverschiebungen gering. Das vereinfachte Modell 2 verhält sich "steifer" als Modell 1, und hat eine geringere statische Verschiebung.

Die Drehwinkel stimmen bei Belastung durch die Einzelkraft $P_x = 1 \text{ [kN]}$ in beiden Modellen im Bereich von 0 bis 2,5 Hz gut überein. Jedoch wird die Kippschwingung bei 3 Hz von dem vereinfachten Modell nicht wiedergegeben. Bei Erdbebenerregung sind die Unterschiede zwischen beiden Modellabbildungen beim Drehwinkel verhältnismäßig groß. Hier wird die Kippschwingung bei 1,6 Hz vom vereinfachten Modell überschätzt, während die Kippschwingung bei 5 Hz nicht wiedergegeben wird. Das vereinfachte Modell ist daher zur Berechnung von Drehwinkeln nicht geeignet. Zur Ermittlung von Horizontalverschiebungen im Frequenzbereich von 0 bis ~ 6 Hz ist jedoch auch das vereinfachte Modell genügend genau.

8.2.6.3 Übertragungsfunktionen des Stabmodells

Zum Vergleich des Stabmodells mit dem dreidimensionalen Finite-Element-Modell wird der Fall einer Fußpunktserregung in der starren unteren Schicht untersucht. Die Übertragungsfunktionen werden sowohl auf die Horizontalverschiebung $\underline{u}_g = 1 \text{ [m]}$ des starren Grundgebirges als auch auf die Horizontalverschiebung $\underline{u}_{FF} = 1 \text{ [m]}$ im Freifeld bezogen.

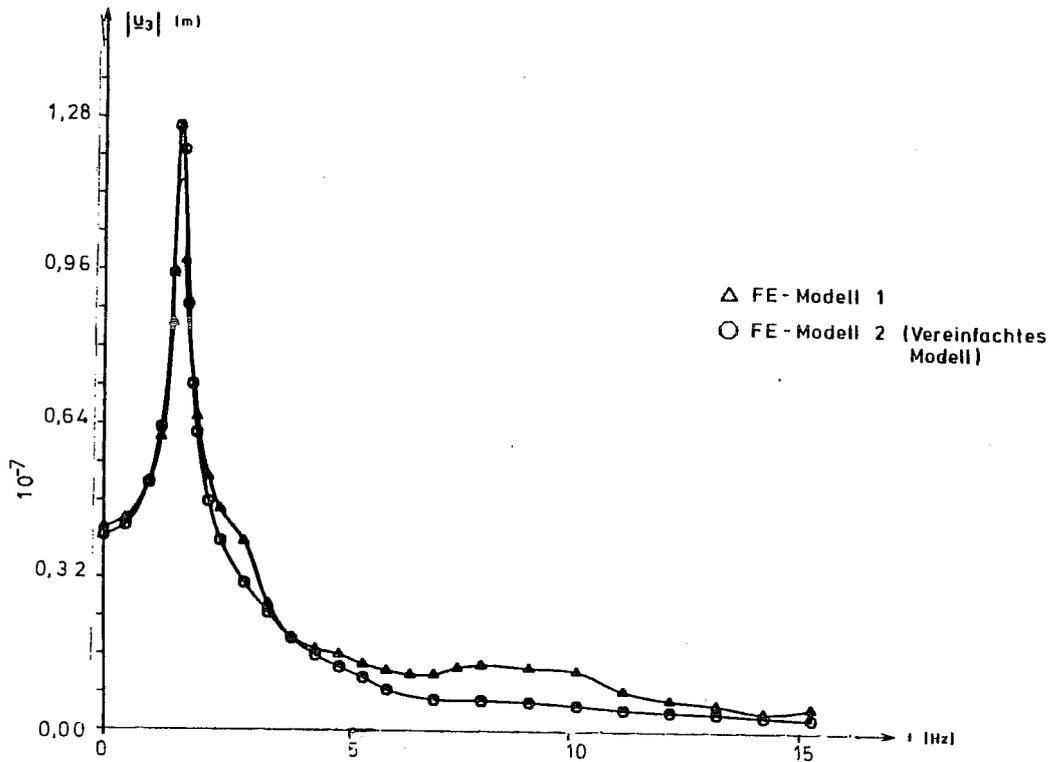


Bild 59: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Decke bei einer Einzelkraft $\underline{P}_x = 1$ [kN] in Deckenmitte - Betrag

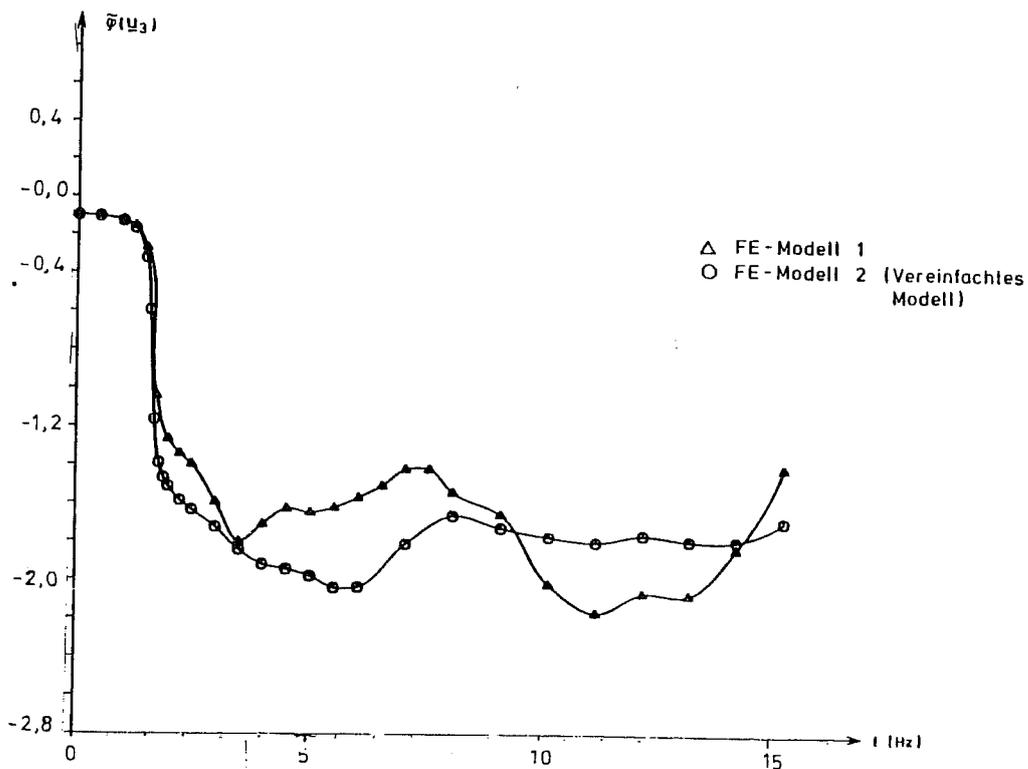


Bild 60: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Decke bei einer Einzelkraft $\underline{P}_x = 1$ [kN] in Deckenmitte - Phasenwinkel

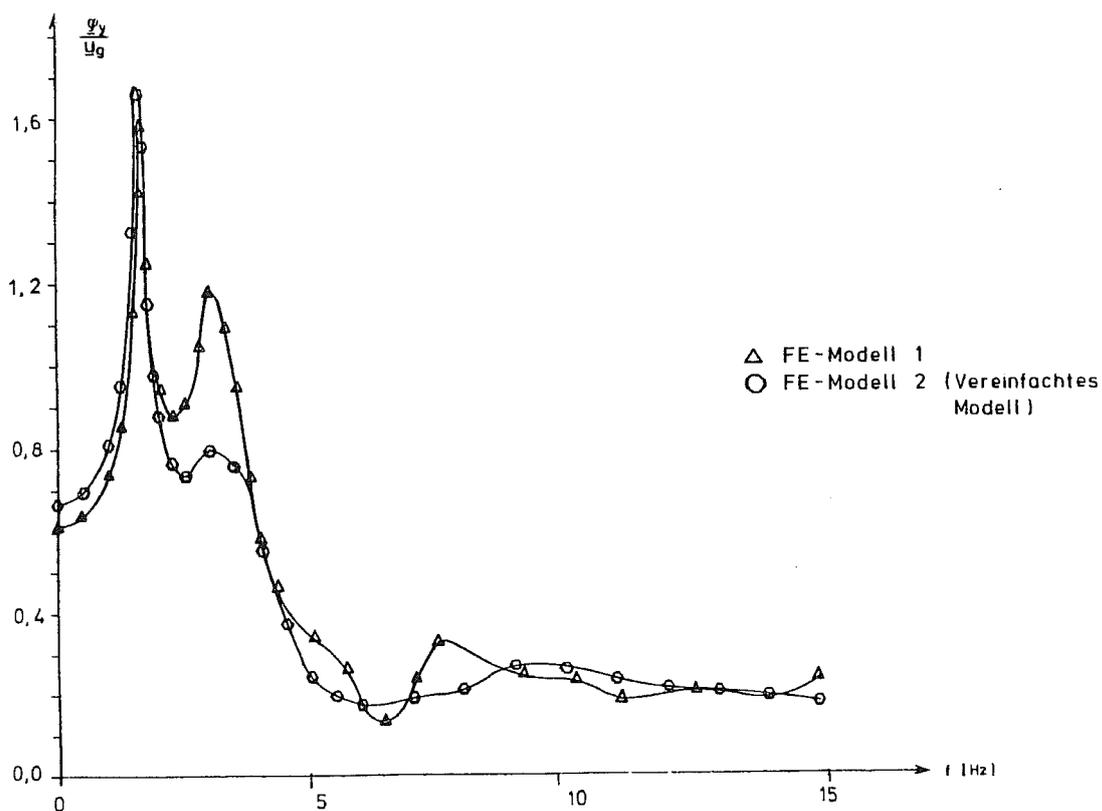


Bild 61: Übertragungsfunktion des Drehwinkels der Decke bei einer Einzelkraft $\underline{P}_x = 1$ [kN] in Deckenmitte - Betrag

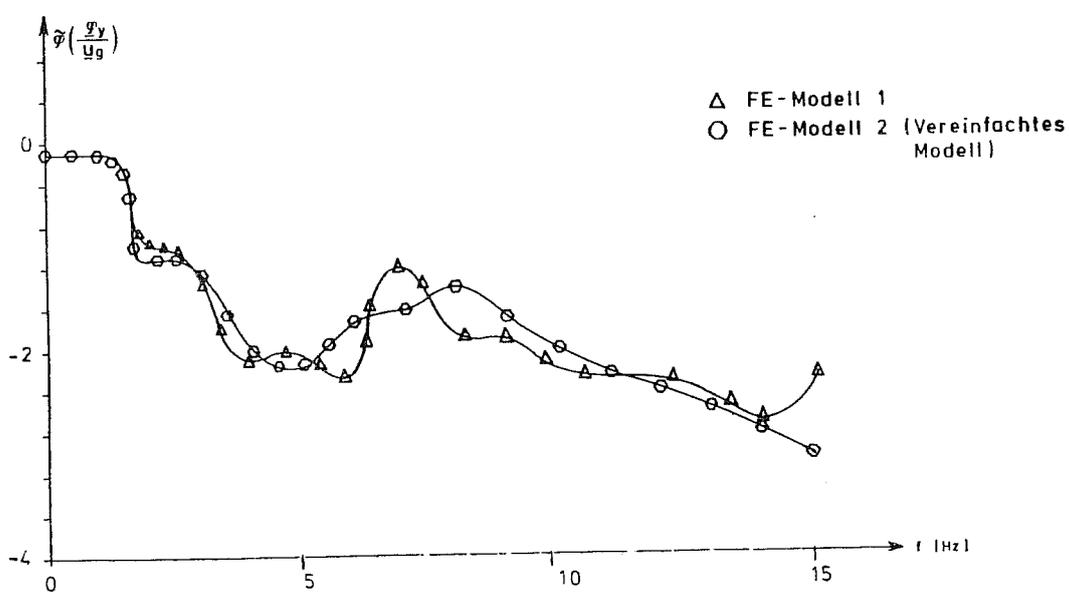


Bild 62: Übertragungsfunktion des Drehwinkels der Decke bei einer Einzelkraft $\underline{P}_x = 1$ [kN] in Deckenmitte - Phasenwinkel

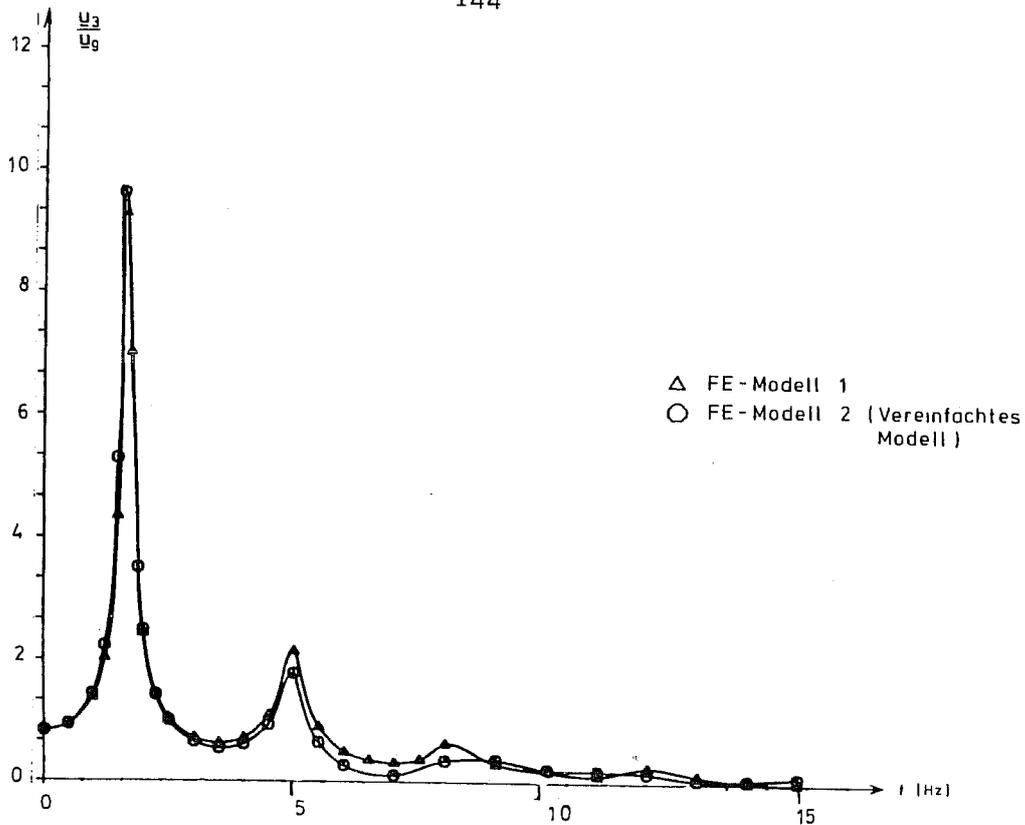


Bild 63: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Decke bei Erdbebenerregung $\underline{u}_g = [kN]$ in der starren Schicht in x-Richtung - Betrag

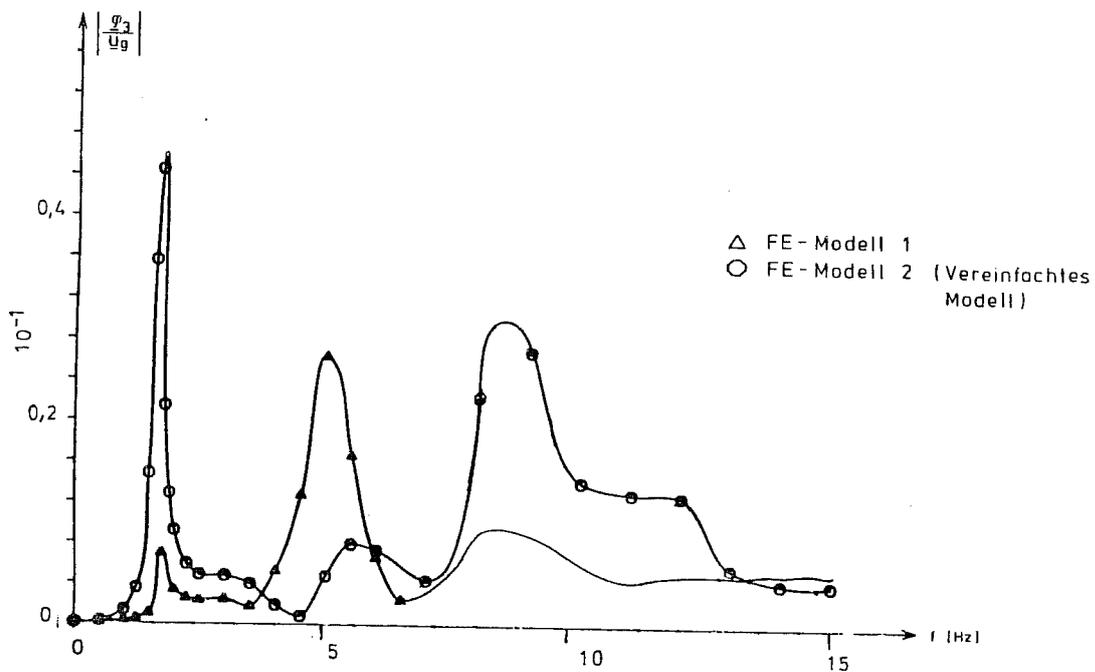


Bild 64: Übertragungsfunktion des Drehwinkels der Decke bei Erdbebenerregung $\underline{u}_g = 1 [kN]$ in der starren Schicht in x-Richtung - Betrag

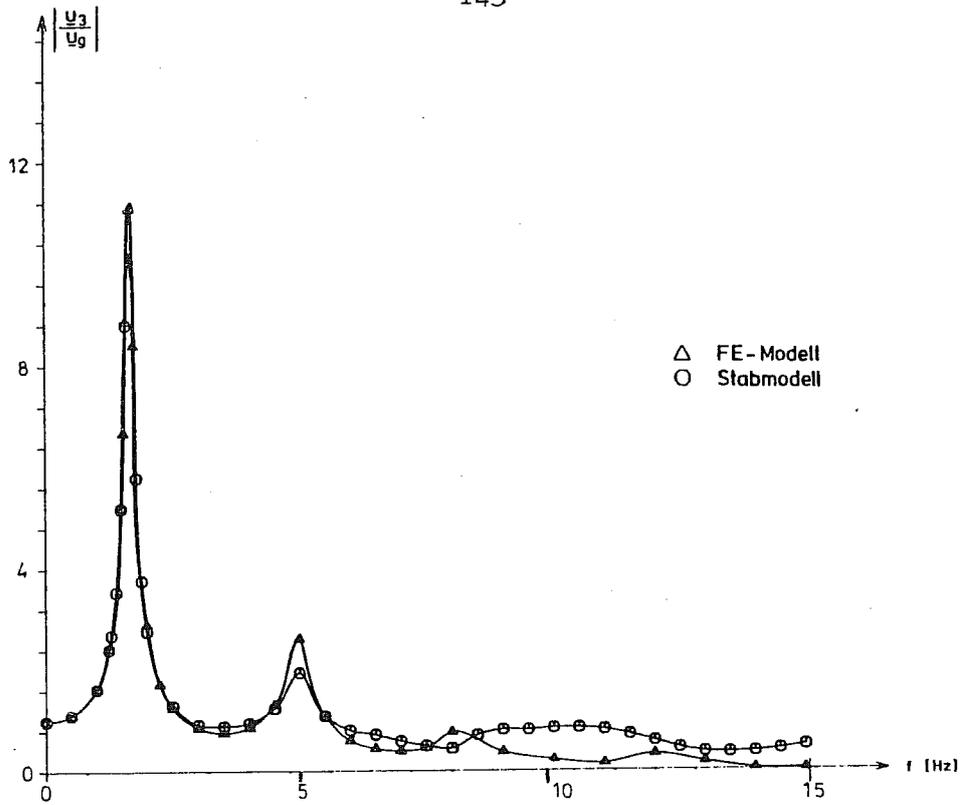


Bild 65: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Decke bei Erdbebenerregung $\underline{u}_g = 1$ [kN] in der starren Schicht in x-Richtung - Betrag

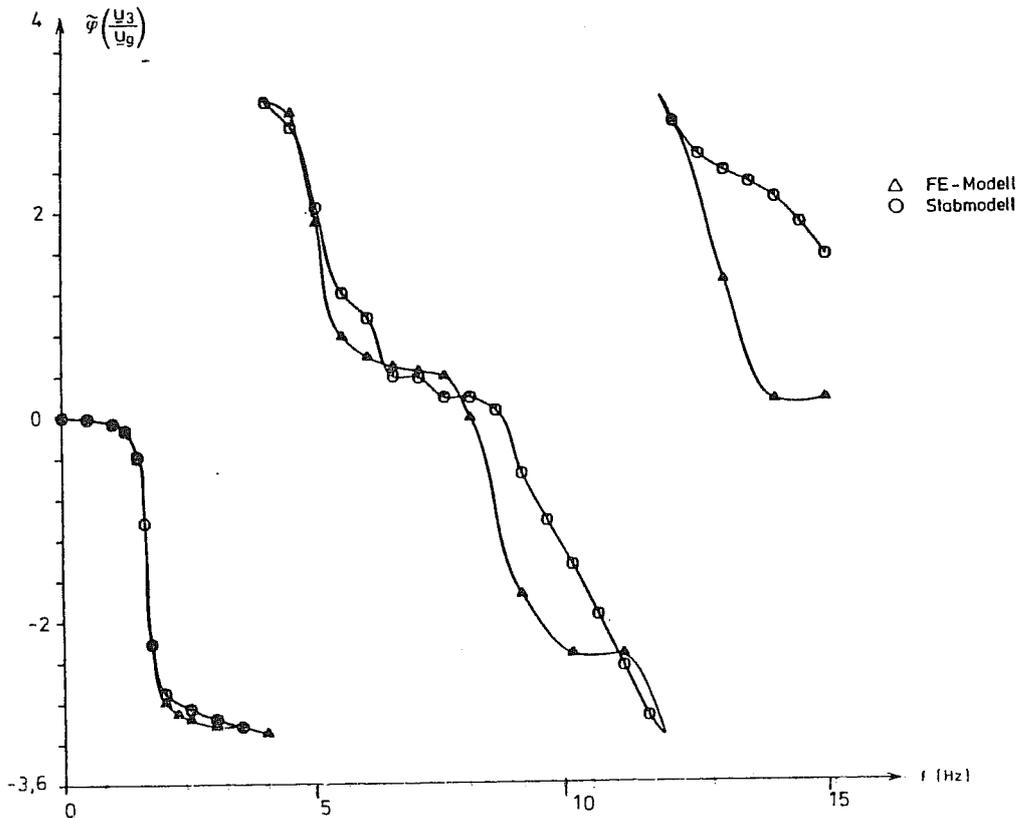


Bild 66: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Decke bei Erdbebenerregung $\underline{u}_g = 1$ [kN] in der starren Schicht in x-Richtung - Phasenwinkel

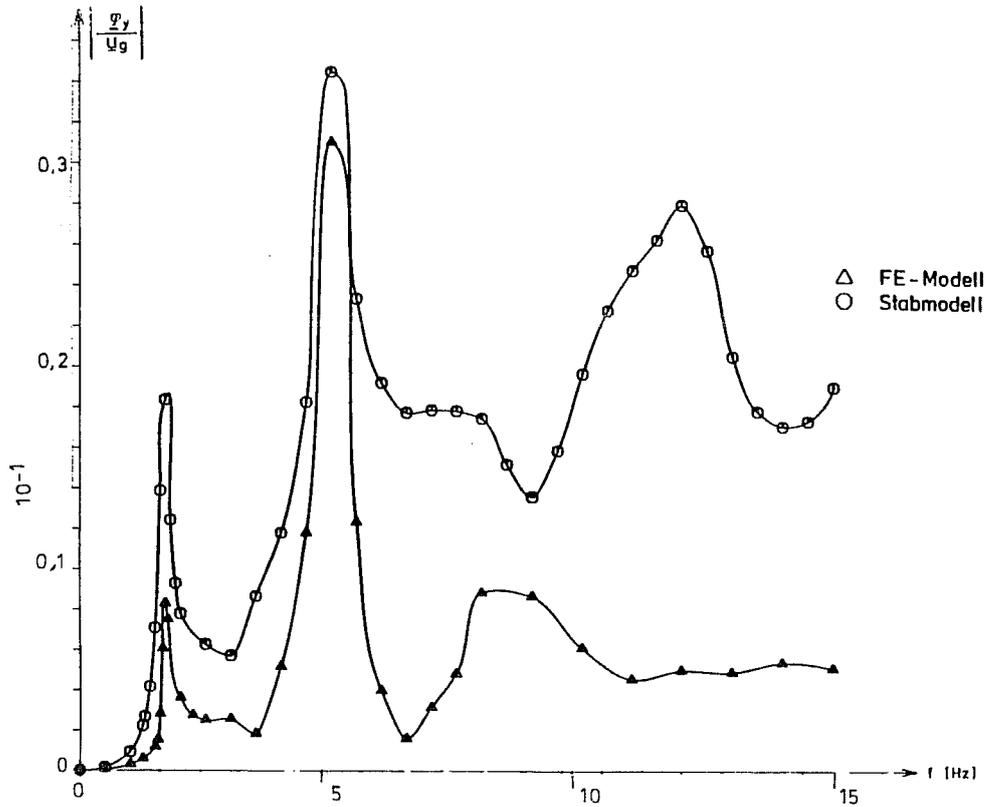


Bild 67: Übertragungsfunktion des Drehwinkels der Decke bei Erdbewegung $\underline{u}_g = 1$ [kN] in der starren Schicht in x-Richtung - Betrag

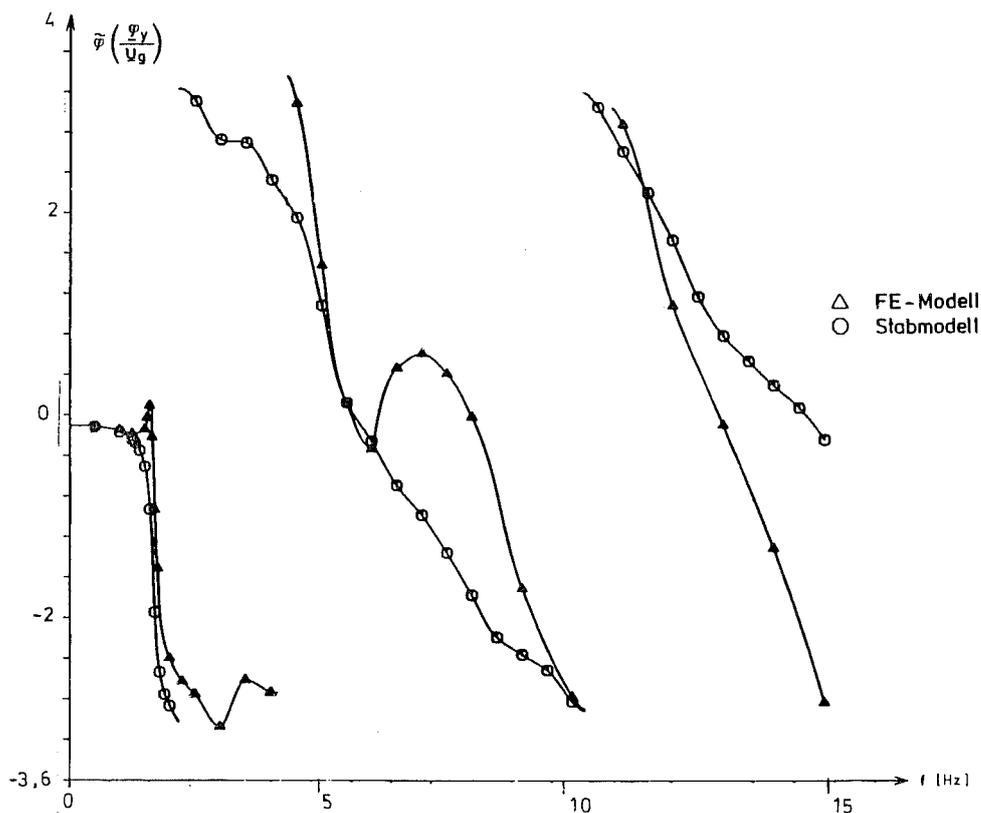


Bild 68: Übertragungsfunktion der Drehwinkels der Decke bei Erdbewegung $\underline{u}_g = 1$ [kN] in der starren Schicht in x-Richtung - Phasenwinkel

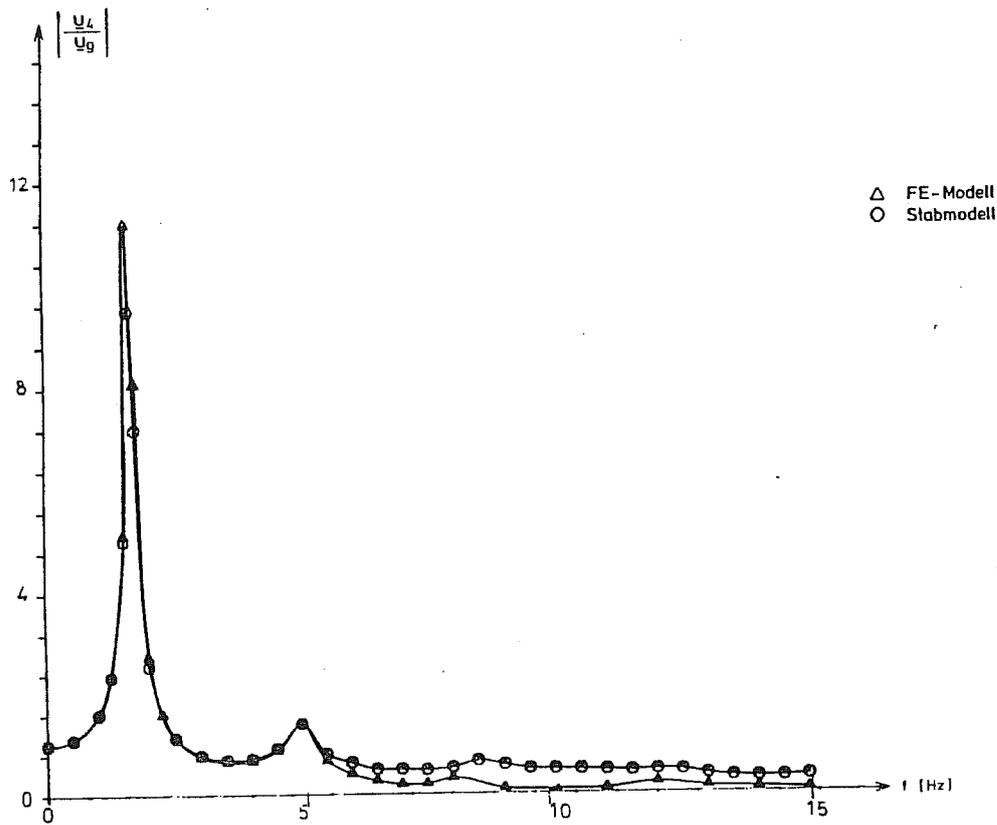


Bild 69: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Bodenplatte bei Erdbebenerregung $\underline{u}_g = 1$ [kN] in der starren Schicht in x-Richtung - Betrag

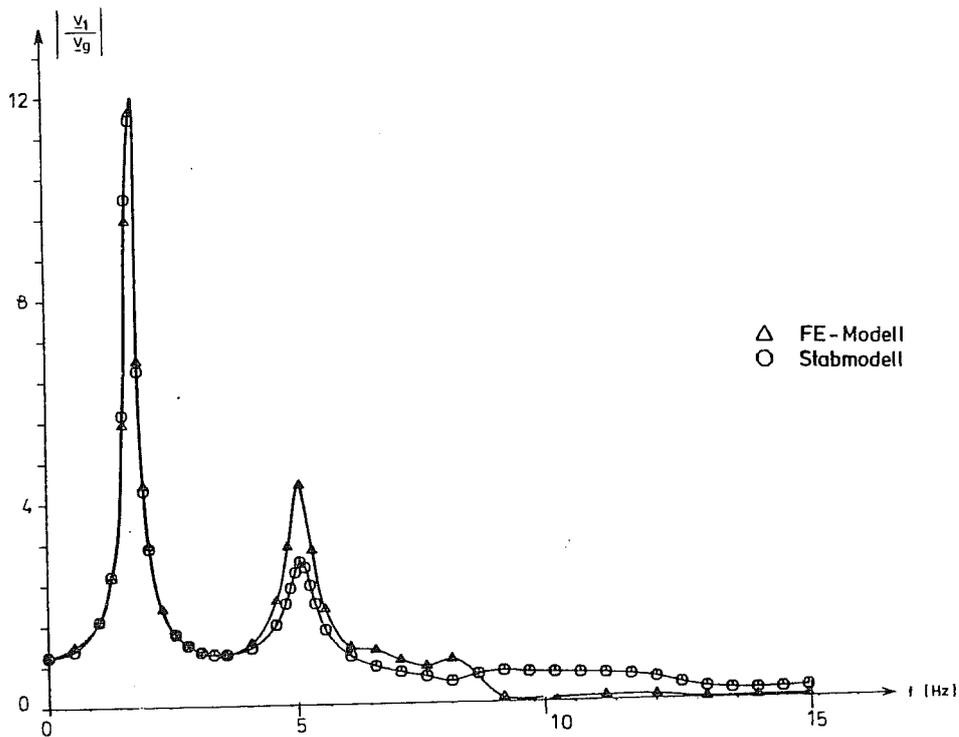


Bild 70: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Decke bei Erdbebenerregung $\underline{u}_g = 1$ [kN] in der starren Schicht in y-Richtung - Betrag

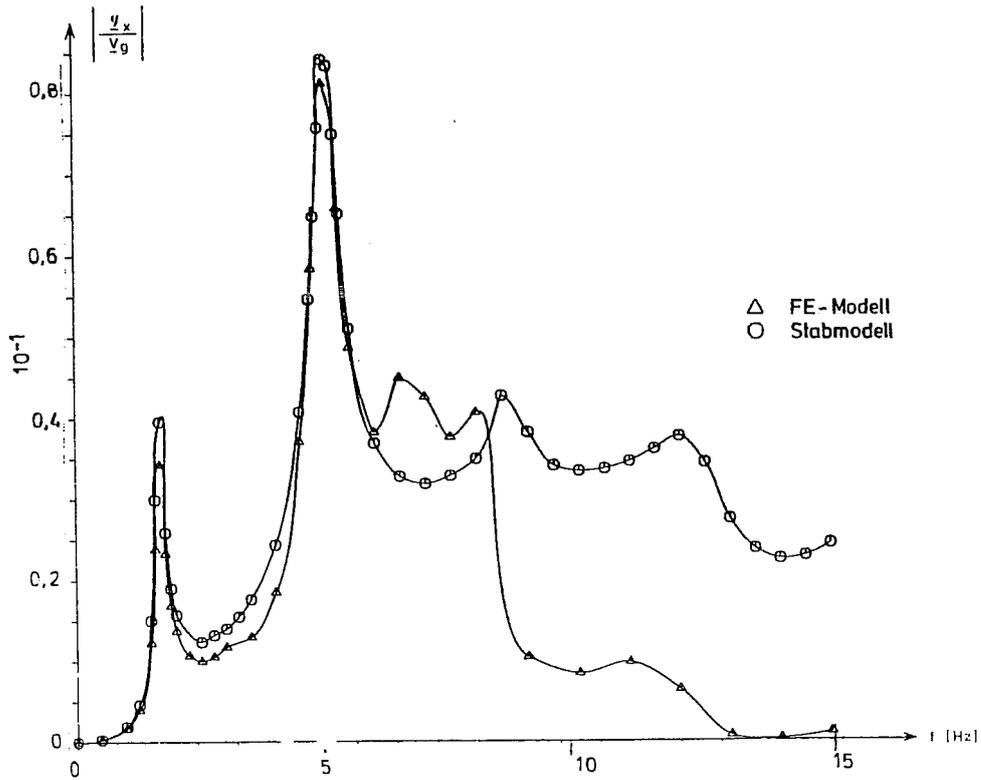


Bild 71: Übertragungsfunktion der Drehwinkels der Decke bei Erdbebenerregung $\underline{u}_g = 1$ [kN] in der starren Schicht in y-Richtung - Betrag

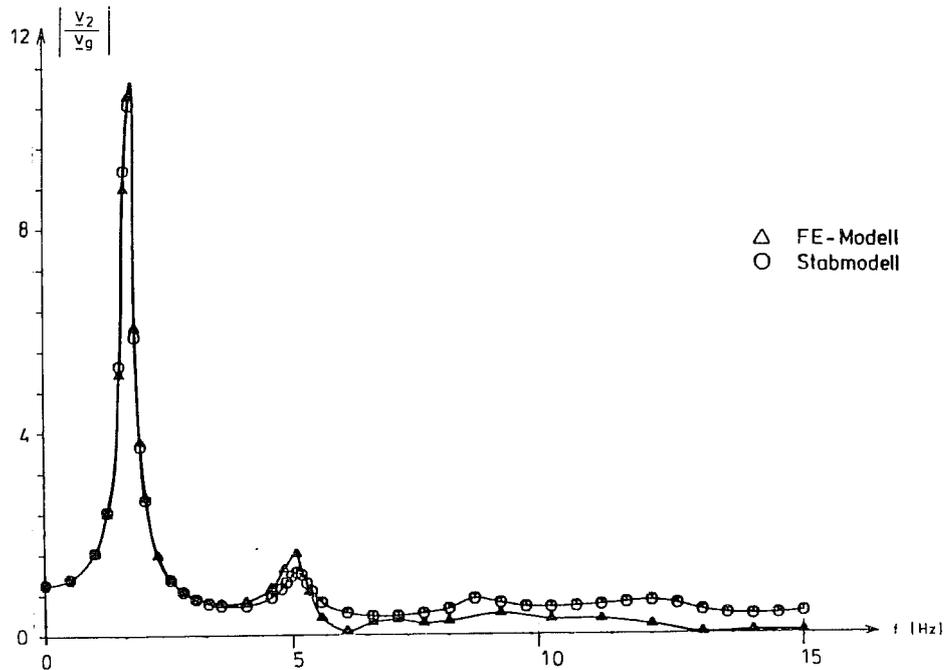


Bild 72: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Bodenplatte bei Erdbebenerregung $\underline{u}_g = 1$ [kN] in der starren Schicht in y-Richtung - Betrag

In den Bildern 65 bis 72 sind die Übertragungsfunktionen beider Modelle für eine Verschiebung der starren Schicht mit $\underline{u}_g = 1$ dargestellt. Aus dem Verlauf der Horizontalverschiebungen von Bodenplatte und Decke des Bauwerks ist ersichtlich, daß diese wesentlich vom Übertragungsverhalten der elastischen Bodenschicht bestimmt werden. Die Verschiebungen des Bauwerks liegen jedoch unter denjenigen im Freifeld.

Im Bereich der ersten Eigenfrequenzen ist eine sehr gute Übereinstimmung zwischen beiden Modellen festzustellen, während bei der zweiten Eigenfrequenz in den Verschiebungen der Decke Abweichungen in der Höhe der Resonanzspitze auftreten. Bei Frequenzen $> \sim 8$ Hz werden die Unterschiede verhältnismäßig groß. Jedoch sind die Amplituden der Verschiebungen in diesem Frequenzbereich sehr klein gegenüber denjenigen im Bereich der ersten beiden Eigenfrequenzen.

Bei den Drehwinkeln ist die Übereinstimmung in beiden Modellen weniger gut als bei den Verschiebungen. Jedoch werden die Resonanzspitzen für Kippschwingungen bei ~ 5 Hz sowie bis zu Frequenzen von ~ 6 Hz der charakteristische Verlauf in beiden Modellen gleich wiedergegeben.

Die auf die Freifeldverschiebung bezogenen Verschiebungen der Bodenplatte und der Decke sind in den Bildern 73 bis 78 dargestellt. Bei niedrigen Frequenzen sind die Verschiebungen von Bauwerk und Boden im Freifeld gleich. Mit zunehmender Frequenz nehmen die Bauwerksverschiebungen ab, d.h. das Bauwerk setzt den Bodenverschiebungen einen Widerstand entgegen.

Die Übereinstimmung der Übertragungsfunktionen von Stabmodell und Finite-Element-Modell ist bis ca. 5 Hz als gut anzusehen. Bei höheren Frequenzen werden die Unterschiede zwischen den auf die starre Schicht bezogenen Übertragungsfunktionen größer (Bilder 63, 65), was zu verhältnismäßig großen Abweichungen bei den nach Gl. (8.11b) auf das Freifeld bezogenen Verschiebungen führt. In diesem Frequenzbereich nimmt jedoch auch die durch die Elemententeilung bedingte numerische Genauigkeit beim Finite-Element-Modell ab, während beim Stabmodell die Vernachlässigung der Kopplungsterme

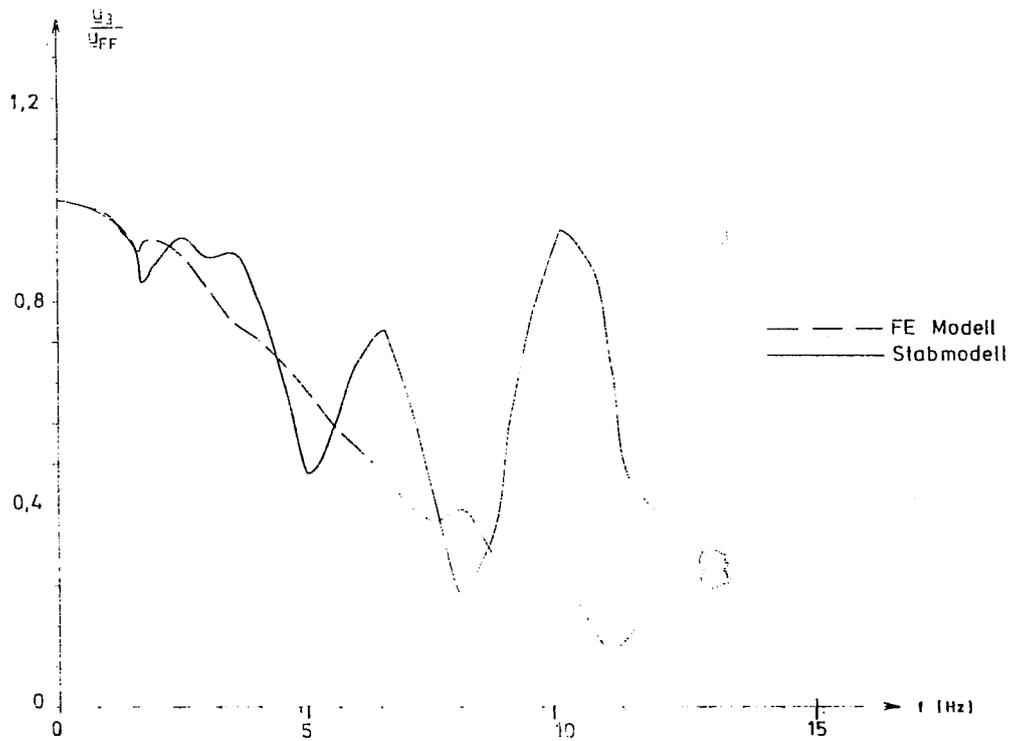


Bild 73: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Decke,
Erdbebenerregung im Freifeld in x-Richtung
- Betrag

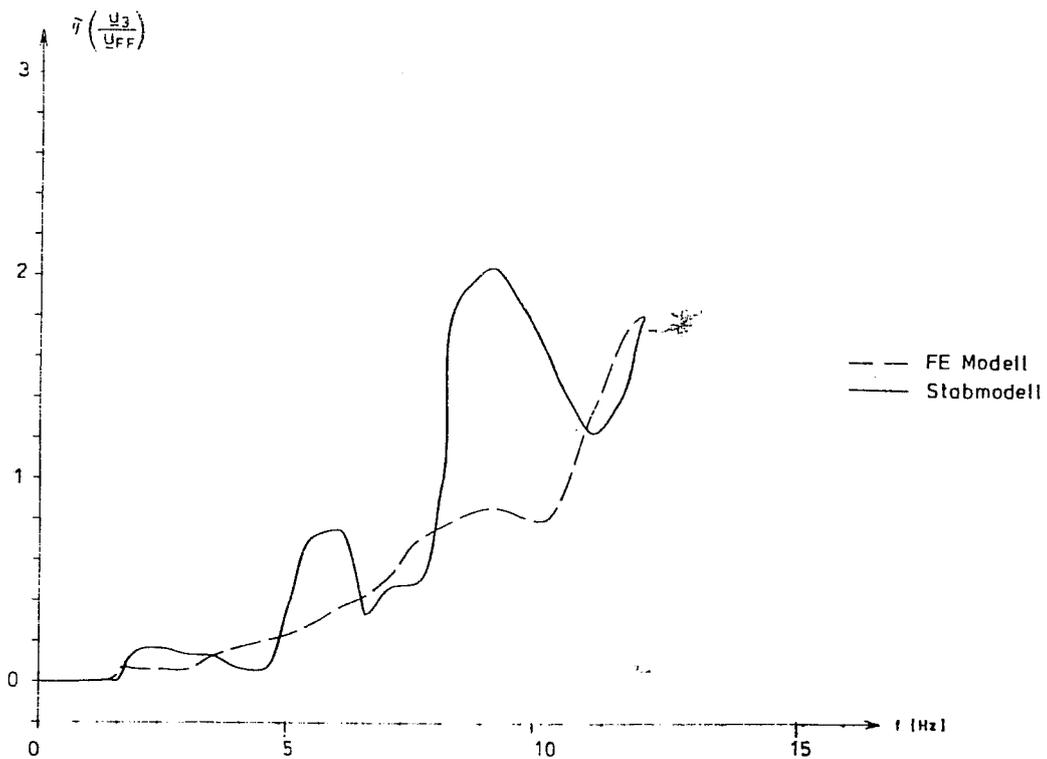


Bild 74: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Decke,
Erdbebenerregung im Freifeld in x-Richtung
- Phasenwinkel

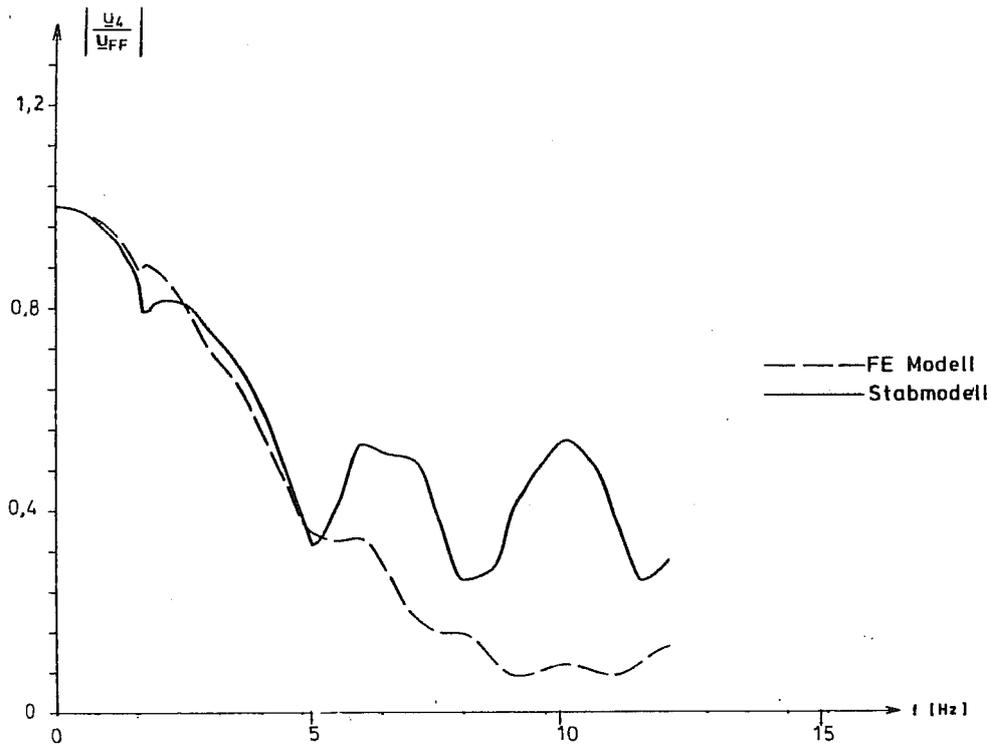


Bild 75: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Bodenplatte, Erdbebenerregung im Freifeld in x-Richtung
- Betrag

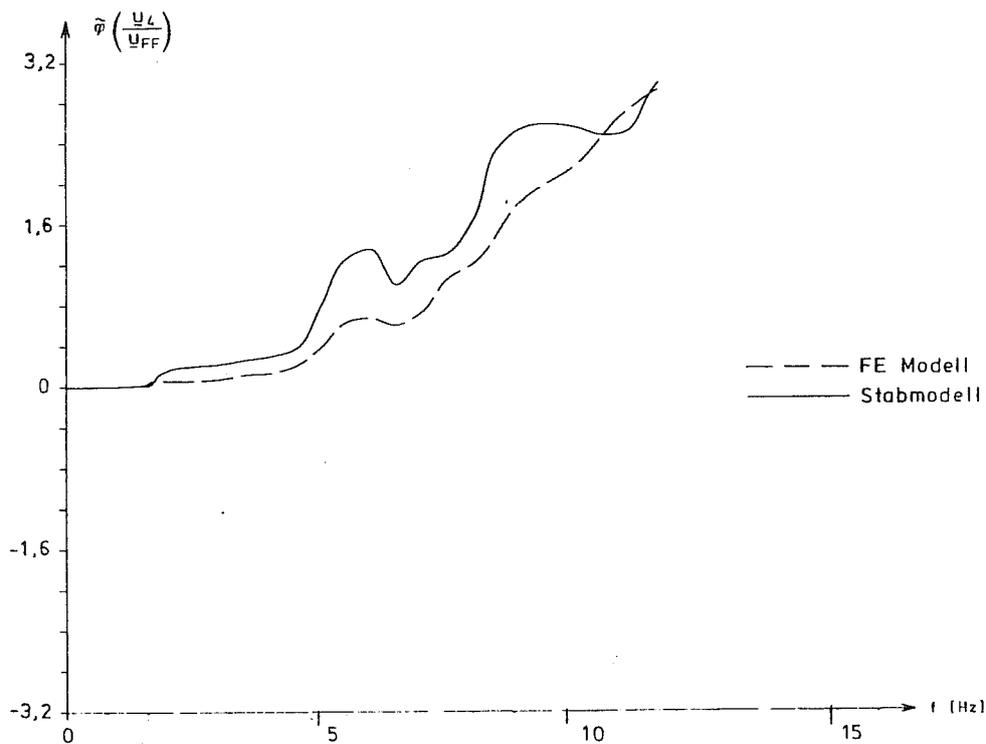


Bild 76: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Bodenplatte, Erdbebenerregung im Freifeld in x-Richtung
- Phasenwinkel

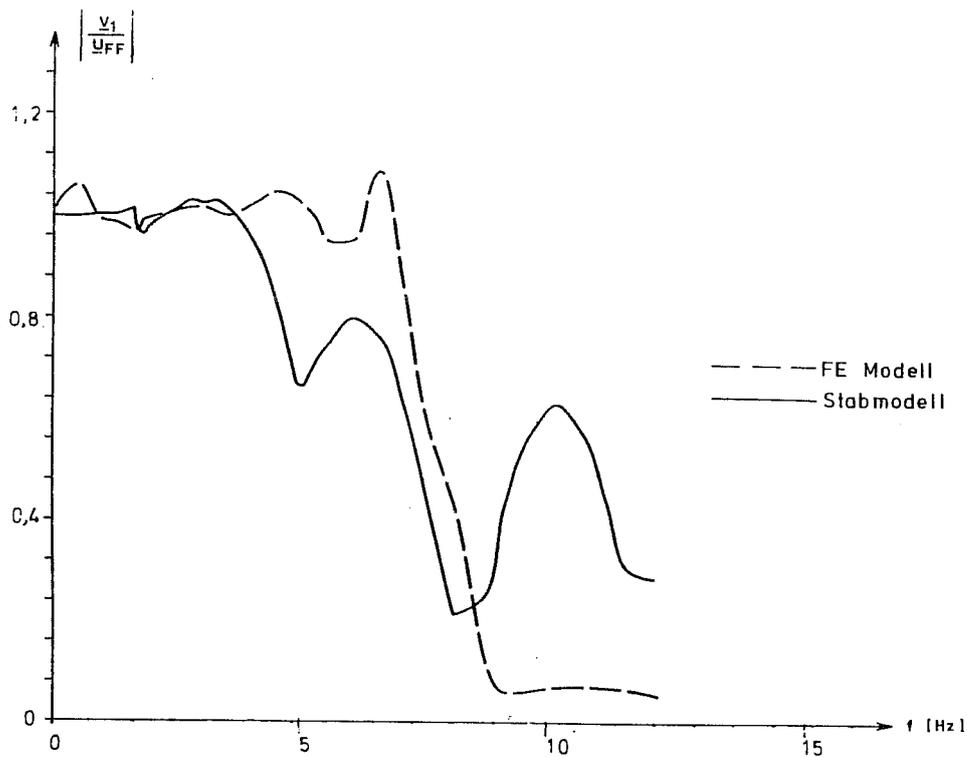


Bild 77: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Decke, Erdbebenerregung im Freifeld in y-Richtung
- Betrag

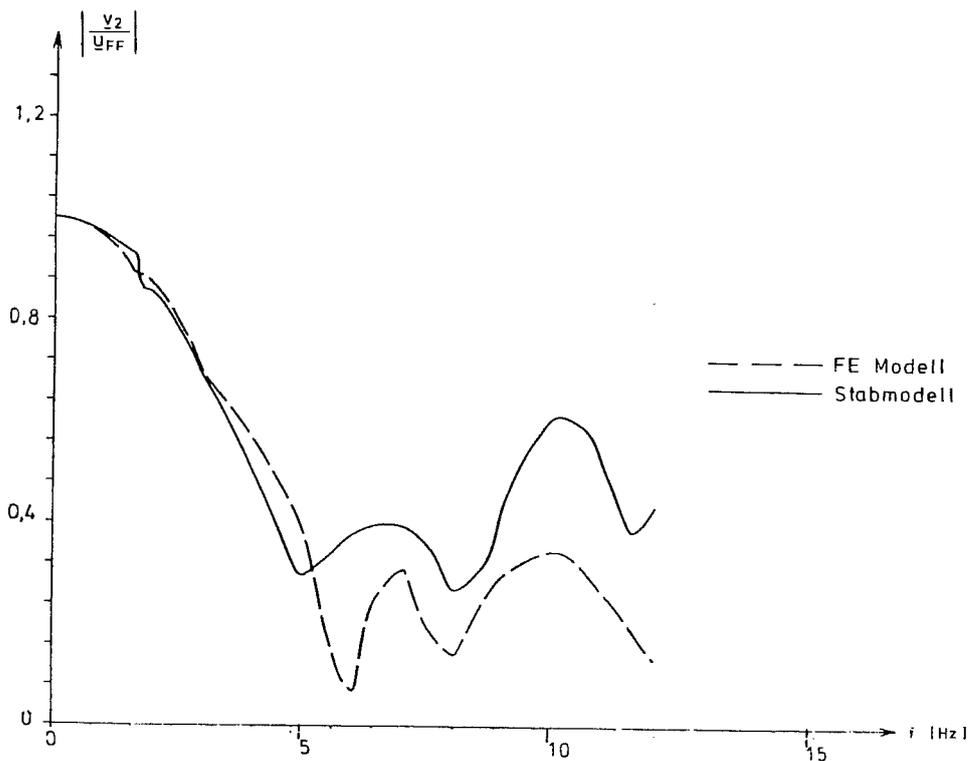


Bild 78: Übertragungsfunktion der Horizontalverschiebung der Bodenplatte, Erdbebenerregung im Freifeld in y-Richtung
- Betrag

von Einfluß werden kann. Die Abweichungen in diesem Frequenzbereich lassen sich daher nicht eindeutig auf ein unterschiedliches Verhalten der vereinfachten Modellabbildung (Bauwerk als Stab, Boden rotationssymmetrisch) zurückführen. Im niederfrequenten Bereich ist die für praktische Berechnungen gute Übereinstimmung der mit beiden Modellabbildungen erhaltenen Übertragungsfunktionen festzustellen.

8.2.7 Zeitverlaufsberechnungen

Ist die Schwingungsanregung in Form eines bestimmten Zeitverlaufs der Erregerfunktion gegeben, so kann man die Antwortschwingung mit Hilfe der Übertragungsfunktion bestimmen. Dazu führt man eine Fourier-Analyse der Erregerfunktion nach Gl. (2.3a,b) durch und ermittelt mit der Übertragungsfunktion der untersuchten Größe deren Fouriertransformierte für die gegebene Erregungsfunktion. Den Zeitverlauf der untersuchten Größe findet man durch Rücktransformation in den Zeitbereich nach Gl. (2.1).

Die Fouriertransformation nach Gl. (2.3a,b) wird näherungsweise mit der diskreten Fouriertransformation durchgeführt. Die zugrundegelegte Periode T_0 beträgt 10.24 s, die Anzahl der Stützstellen im Zeitbereich ist 2048. Damit ist der Stützstellenabstand auf der Frequenzachse gegeben zu

$$\Delta f = \frac{1}{10.24} \left[s^{-1} \right]$$

Für die diskrete Fouriertransformation wird der Fast Fourier Algorithmus verwendet /39/.

Die Zeitverlaufsberechnungen werden mit Beschleunigungszeitverläufen durchgeführt. Da das Verhältnis der Fourier-transformierten Verschiebungen und Beschleunigungen gleich ist, d.h.

$$\frac{\underline{u}_i}{\underline{u}_g} = \frac{\underline{\ddot{u}}_i}{\underline{\ddot{u}}_g} = \frac{-\Omega^2 \cdot \underline{u}_i}{-\Omega^2 \cdot \underline{u}_g}$$

gilt, können die Übertragungsfunktionen auch für Beschleunigungen angewandt werden. Als Ergebnis erhält man nach der Rücktransformation den Zeitverlauf der Antwortbeschleunigung.

Für die Zeitverlaufberechnungen werden die gemessenen Beschleunigungs-Zeitverläufe der beiden folgenden kalifornischen Beben verwendet:

- Hollister, Northern California vom 9.3.1949, SO1W und N89W Komponenten (NC-SO1W, NC-N89W)
- Helena, Montana vom 31.10.1935, E00W und NOOS Komponenten (HE-E00W, HE-NOOS)

In den Bildern 79 bis 86 sind die Beschleunigungs-Zeitverläufe sowie die Amplitudenspektren (in der Darstellung $|X(\Omega)|$ nach Gl. (2.4)) der Fourier-transformierten Beschleunigungsverläufe der verwendeten Beben dargestellt. Man erkennt, daß die maßgeblichen Frequenzen im Bereich von 1-10 Hz und damit im Gültigkeitsbereich der Modellabbildung liegen.

Für die Erdbebenuntersuchungen wird der Fall einer auf das Freifeld bezogenen Erdbebenerregung betrachtet. In den Bildern 87 bis 90 sind einige Beschleunigungs-Zeitverläufe der Bauwerksantwortschwingung dargestellt. Die Übereinstimmung der Zeitverläufe von Stabwerks- und Finite-Element-Modell ist im allgemeinen gut. Die Maxima der Beschleunigungen treten zu fast denselben Zeiten auf wie beim Original-Erdbebenzeitverlauf. Dies bedeutet, daß die Dämpfung im hier maßgebenden Frequenzbereich der Übertragungsfunktionen gering ist.

In den Tabellen 8 und 9 sind die während der Zeitverläufe aufgetretenen maximalen Antwortschwingungen zusammengestellt.

Die Abweichungen zwischen Stabmodell und Finite-Element-Modell sind im allgemeinen gering. Sie betragen bei den untersuchten Zeitverläufen im Mittel 9%. Die größten Unterschiede von ca. 25% treten beim HE-NOOS-Zeitverlauf auf. Während bei den übrigen Zeit-

verlaufen die maßgeblichen Frequenzen im Bereich von 1-6 Hz liegen, enthält der HE-NOOS-Zeitverlauf wesentliche Beschleunigungsanteile im Frequenzbereich von 6-10 Hz. Die in diesem Frequenzbereich größeren Unterschiede in den Übertragungsfunktionen von Stabmodell und Finite-Element-Modell führen zu größeren Unterschieden in den Antwortbeschleunigungen.

Bei Erdbebenberechnung ist zu berücksichtigen, daß die erreichbare Genauigkeit der Untersuchungen neben der Modellabbildung und dem verwendeten Berechnungsverfahren noch von weiteren Einflüssen abhängt. So können, insbesondere aufgrund der Streuungen der Baugrundkennwerte, die Ergebnisse immer nur in Grenzen angegeben werden. Auch die im Lastfall Erdbeben anzusetzenden Belastungsfunktionen sind nur näherungsweise bekannt. Die Streuweite dieser Einflüsse ist aber deutlich größer als die Unterschiede der Antwortbeschleunigungen von Stabmodell und dreidimensionalem Finite-Element-Modell. Für die praktische Berechnung des globalen Systemverhaltens sind daher das Finite-Element-Modell und das vereinfachte Stabmodell als gleichermaßen geeignet anzusehen. Aufgrund des geringeren Rechenaufwandes sowie der besseren Überschaubarkeit wird man jedoch ein Stabmodell im allgemeinen vorziehen. Das Beispiel zeigt, daß dabei auch bei eingebetteten steifen Bauwerken mit rechteckiger Grundrißfläche eine vereinfachte Abbildung des Baugrundes durch ein rotationssymmetrisches Baugrundmodell zur Ermittlung der Antwortbeschleunigungen zulässig ist.

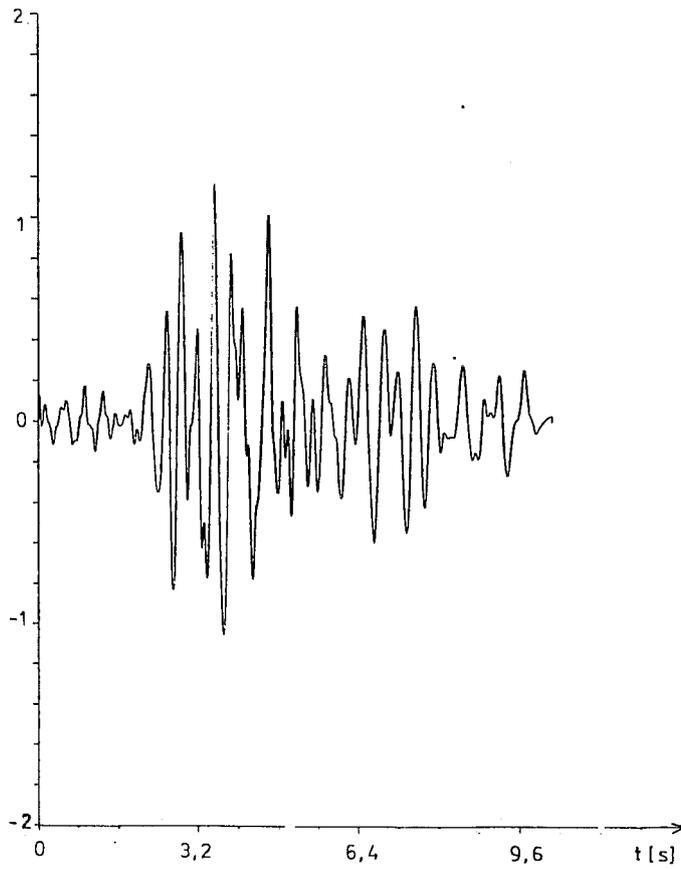


Bild 79: Beschleunigungs-Zeitverlauf, Hollister NC-SO1W

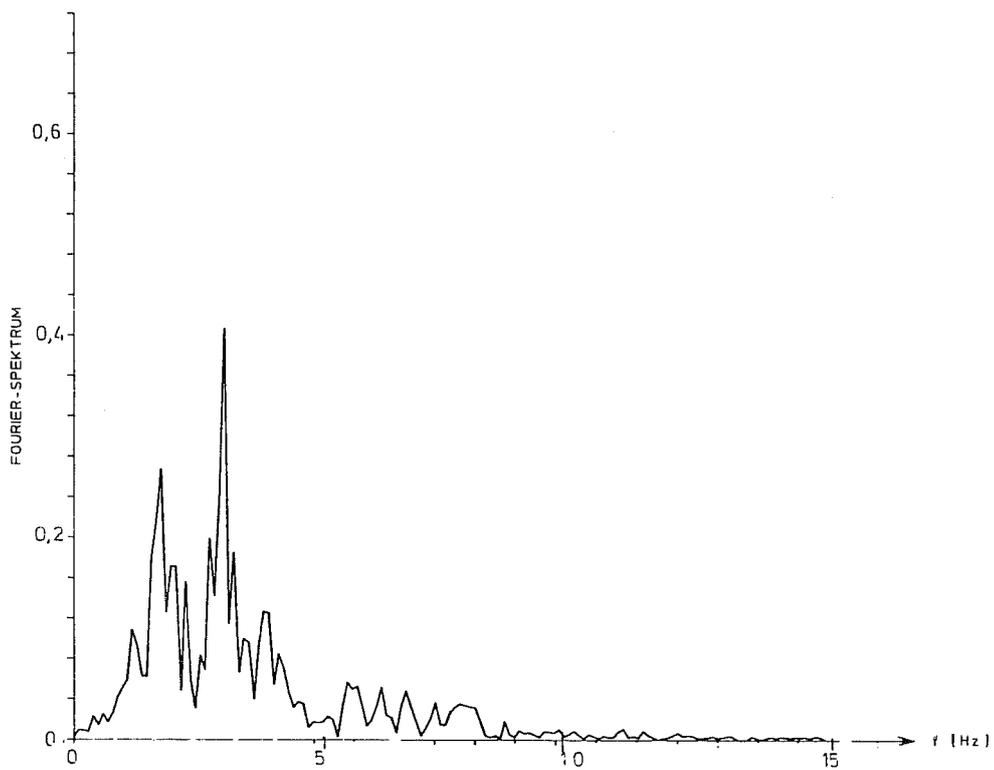


Bild 80: Fourier-Amplitudenspektrum, Hollister NC-SO1W

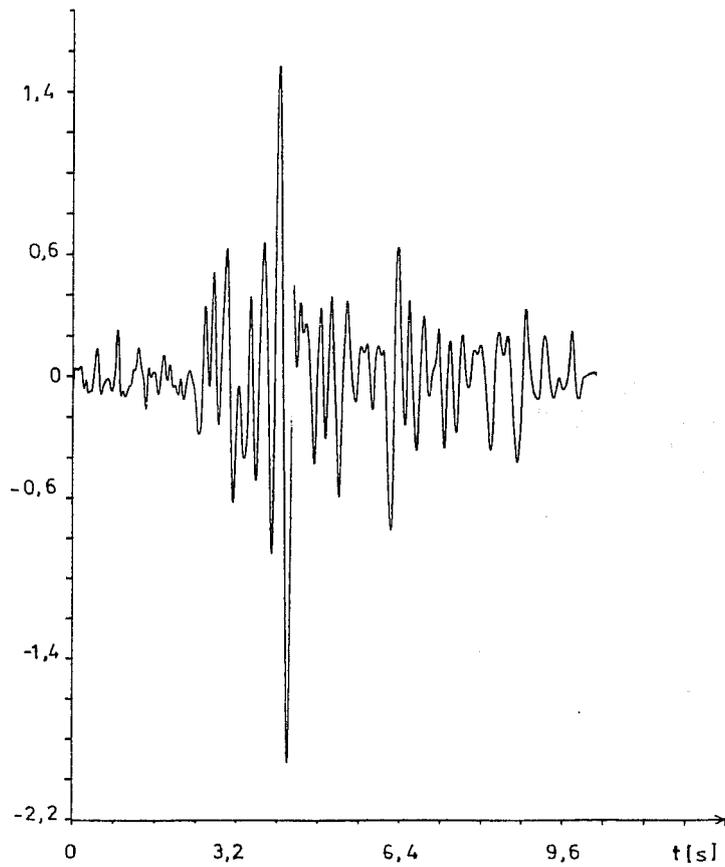


Bild 81: Beschleunigungs-Zeitverlauf, Hollister NC-N89W

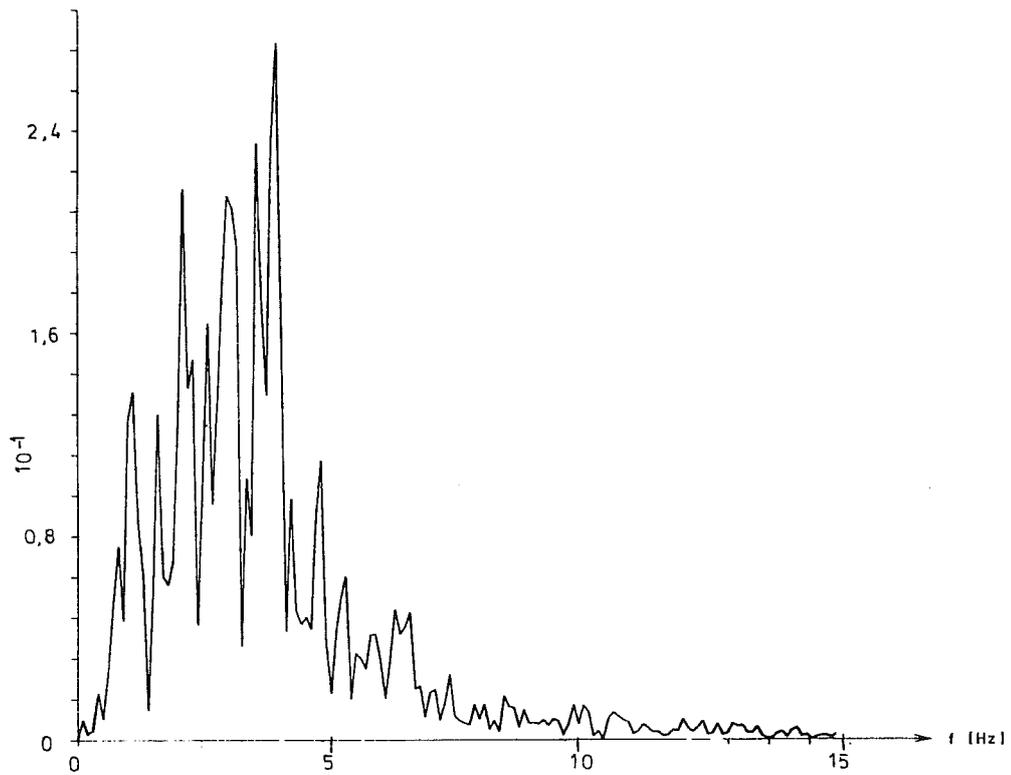


Bild 82: Fourier-Amplitudenspektrum, Hollister NC-N89W

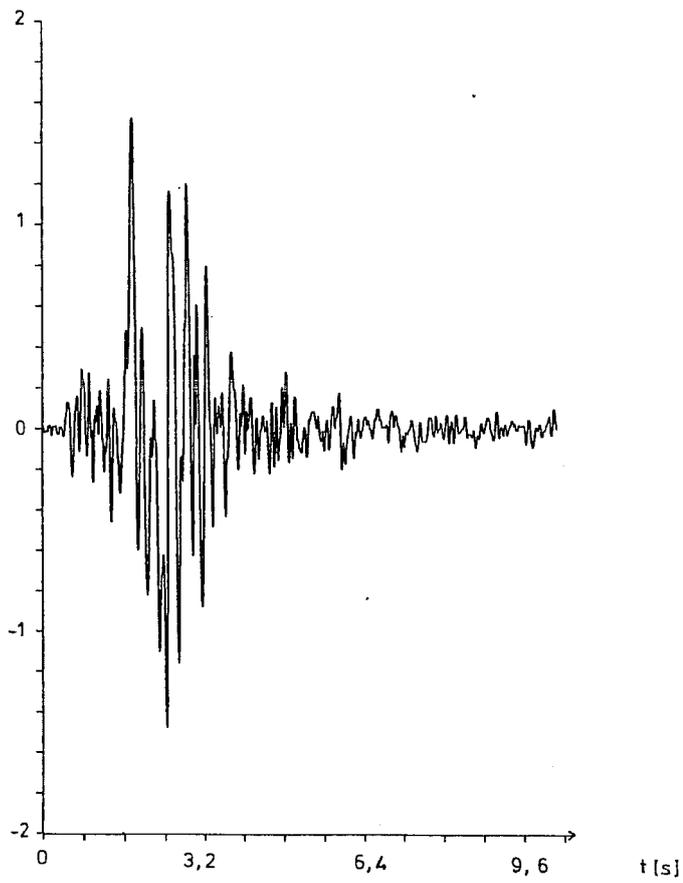


Bild 83: Beschleunigungs-Zeitverlauf, Helena HE-EOOW

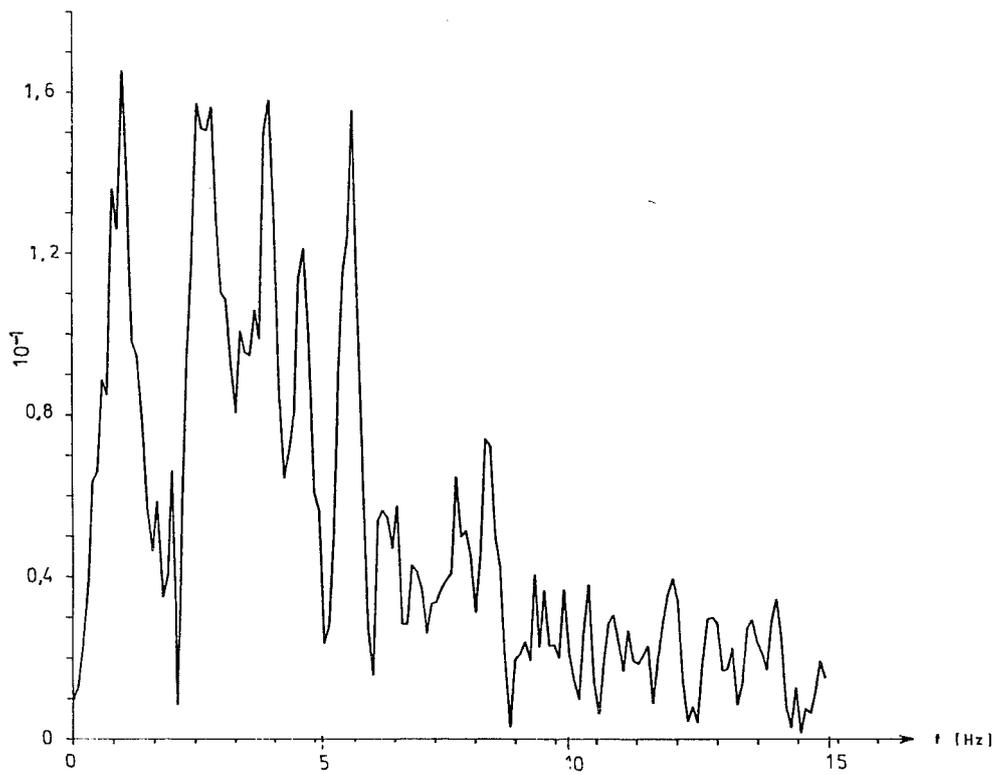


Bild 84: Fourier-Amplitudenspektrum, Helena HE-EOOW

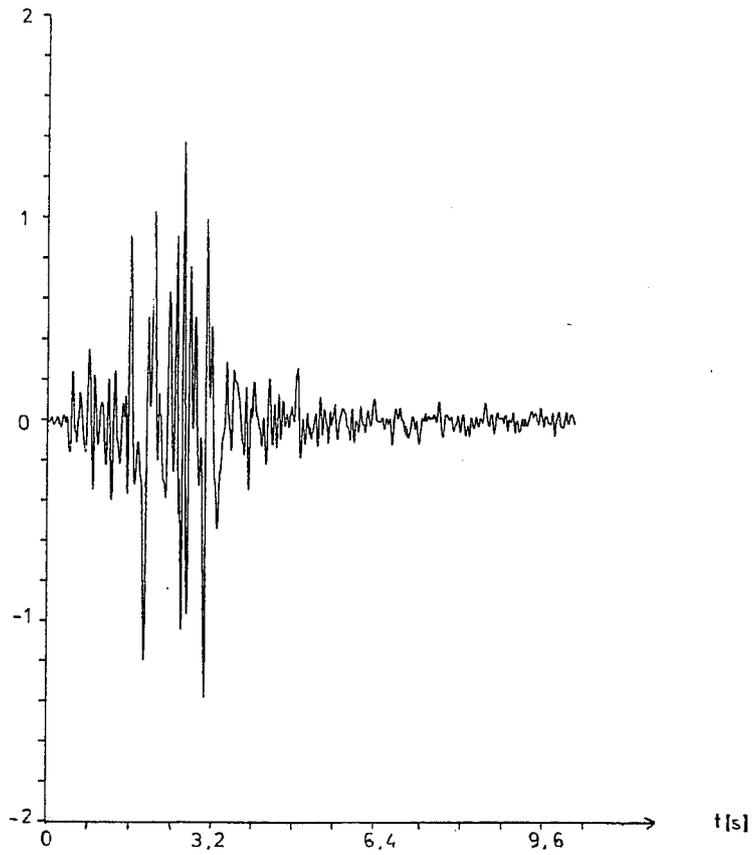


Bild 85: Beschleunigungs-Zeitverlauf, Helena HE-NOOS

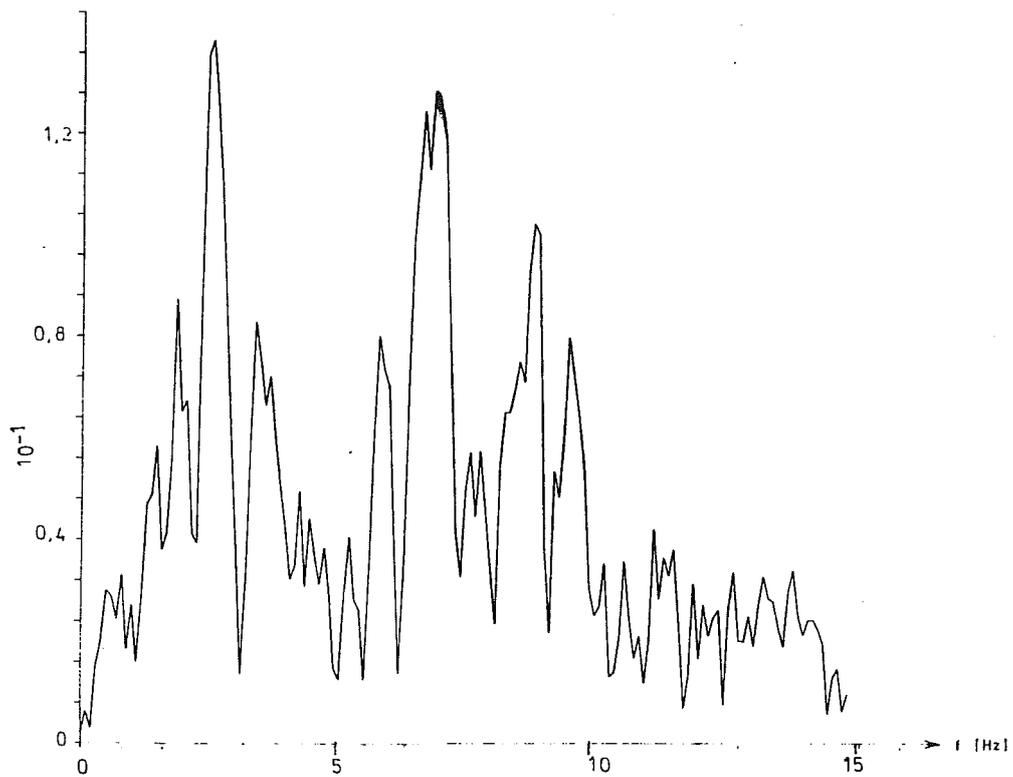


Bild 86: Fourier-Amplitudenspektrum, Helena HE-NOOS

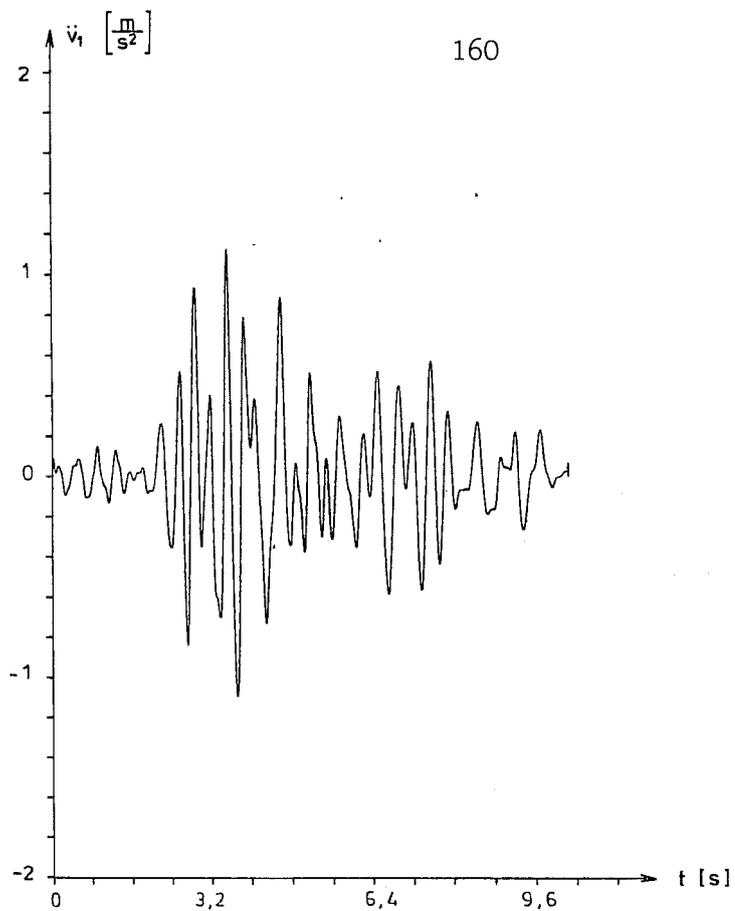


Bild 87: Beschleunigungszeitverlauf der Decke, Stabmodell, Erdbebenanregung Hollister NC-S01W in y-Richtung (Freifeld)

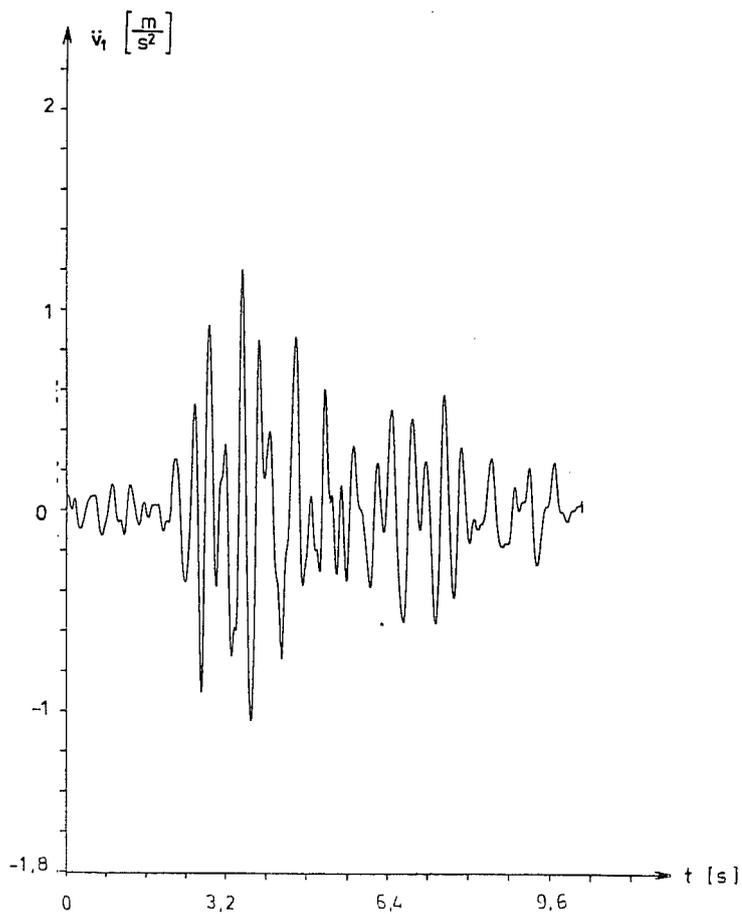


Bild 88: Beschleunigungszeitverlauf der Decke, Finite-Element-Modell, Erdbebenanregung Hollister NC-S01W in y-Richtung (Freifeld)

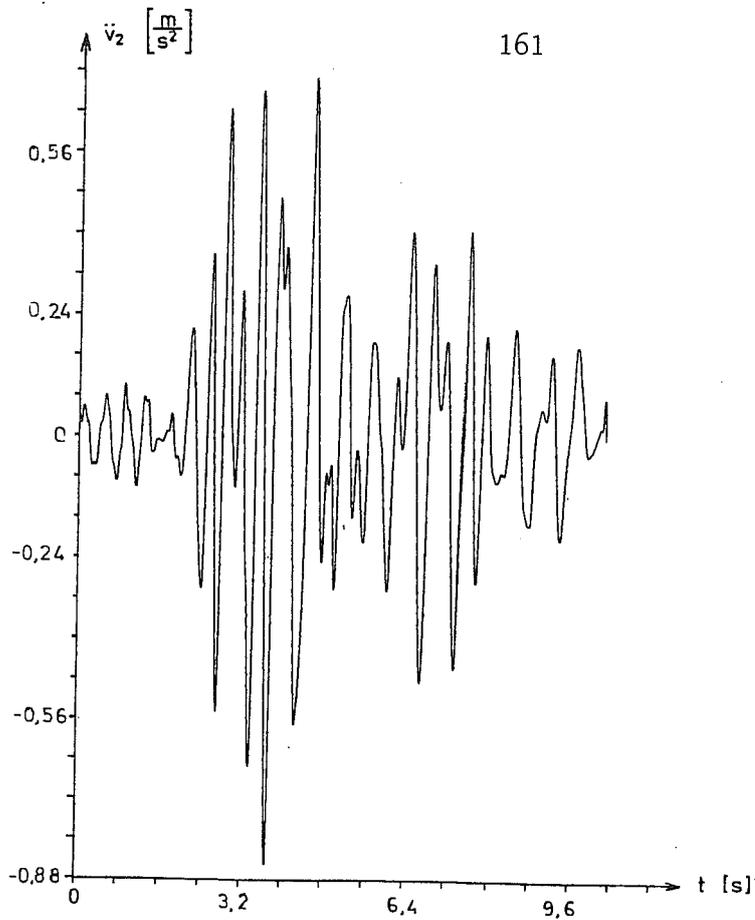


Bild 89: Beschleunigungszeitverlauf der Bodenplatte, Stabmodell, Erdbebenanregung Hollister NC-S01W in y-Richtung (Freifeld)

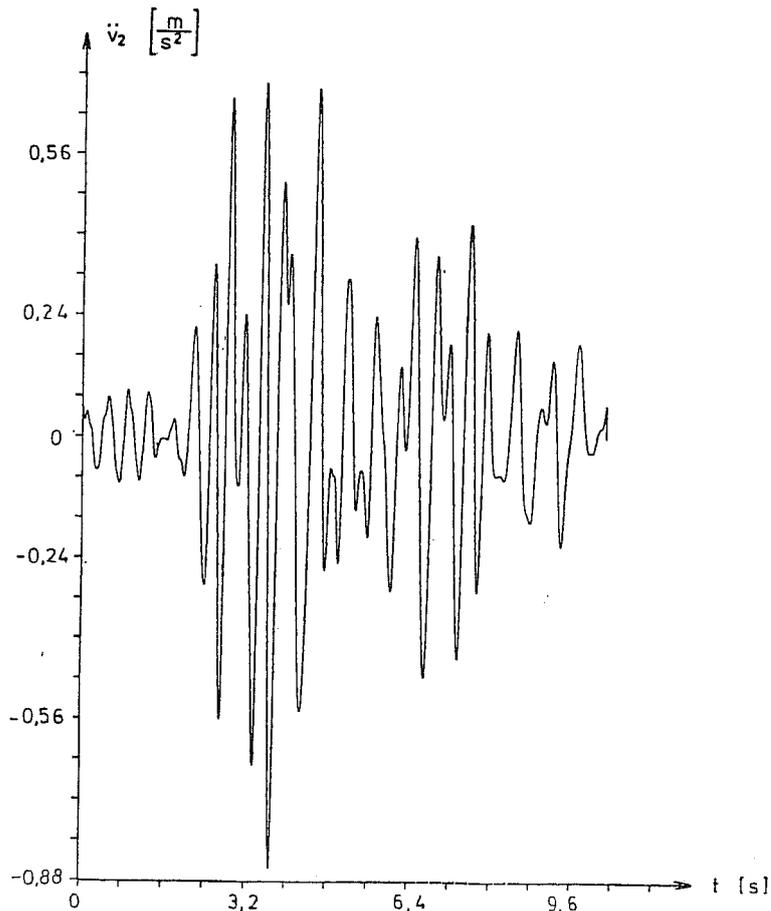


Bild 90: Beschleunigungszeitverlauf der Bodenplatte, Finite-Element-Modell, Erdbebenanregung Hollister NC-S01W in y-Richtung (Freifeld)

Erdbeben	Maximale Beschleunigung	Maximale Antwortbeschleunigung		Maximale Antwortbeschleunigung	
	$[m/s^2]$	Decke	Stabmodell	Bodenplatte	Stabmodell
NC-S01W	1,17	1,00	0,94	0,90	0,86
NC-N89W	1,92	1,63	1,50	1,34	1,29
HE-NOOS	1,38	1,03	0,80	0,84	0,66
HE-EOOW	1,53	1,29	1,24	1,17	1,11

Tabelle 8: Maximale Beschleunigungen bei Freifeldanregung in x-Richtung

Erdbeben	Maximale Beschleunigung	Maximale Antwortbeschleunigung		Maximale Antwortbeschleunigung	
	$[m/s^2]$	Decke	Stabmodell	Bodenplatte	Stabmodell
NC-S01W	1,17	1,13	1,21	0,85	0,86
NC-N89W	1,92	1,87	1,87	1,20	1,24
HE-NOOS	1,38	1,04	0,92	0,77	0,65
HE-EOOW	1,53	1,40	1,46	1,17	1,04

Tabelle 9: Maximale Beschleunigungen bei Freifeldanregung in y-Richtung

9. ZUSAMMENFASSUNG

Bei der dynamischen Berechnung von Baugrundmodellen kann der Boden häufig als unendlich ausgedehntes viskoelastisches Kontinuum aufgefaßt werden. Analytische Lösungen der Bewegungsgleichungen des Kontinuums sind nur für einfache Randbedingungen möglich. Bei komplizierten Rand- und Übergangsbedingungen müssen numerische Verfahren angewandt werden, wobei dem Verfahren der Finite Elemente die größte Bedeutung zukommt. Am Rand des in Finite Elemente diskretisierten Bereichs des unendlich ausgedehnten Bodens ordnet man sogenannte Randelemente an, die die mechanischen Eigenschaften des nicht in Finite Elemente diskretisierten Bodenbereichs besitzen. Diese Randelemente sind insbesondere bei dynamischen Belastungen von Bedeutung, da die hierbei im Boden auftretenden elastischen Wellen eine sehr viel größere Reichweite besitzen als die Verformungen in einem statischen Lastfall. Randelemente, die auf einer mechanisch vollständigen Lösung beruhen, wurden für beliebig geschichtete Böden, die nach unten durch eine starre Schicht begrenzt werden, abgeleitet. Die Steifigkeitsmatrizen derartiger Randelemente sind frequenzabhängig und setzen eine Berechnung im Frequenzbereich voraus. In /1/ werden Randelemente für zweidimensionale und in /2/ ein Randelement für dreidimensionale rotationssymmetrische Finite-Element-Modelle mit nicht rotationssymmetrischem Verschiebungsfeld angegeben. Häufig erfordert jedoch die Modellabbildung eines Systems als rotationssymmetrisches oder zweidimensionales ebenes Modell eine starke Vereinfachung des Systems.

Für dreidimensionale Systeme, die keine Rotationssymmetrie aufweisen, sind bisher keine Randelemente bekannt. Die Abbildung ausgedehnter Baugrundmodelle ohne Randelemente durch dreidimensionale Finite Elemente führt aber zu außerordentlich großen Gleichungssystemen, die auch mit den heute zur Verfügung stehenden Großrechenanlagen in den meisten Fällen nicht mehr lösbar sind. Um den in Finite Elemente zu diskretisierenden Bodenbereich und damit auch den Rechenaufwand zu demgegenüber zu beschränken, wird in der vorliegenden Arbeit ein Randelement für nicht-rotationssymmetrische Systeme angegeben. Der Rand des Elements ist zylinder-

förmig. Innerhalb dieses Zylinders wird die zu untersuchende Struktur (Baugrundmodell und Bauwerk) durch dreidimensionale isoparametrische Elemente abgebildet.

Grundlage des hier angegebenen Randelements ist das Randelement für rotationssymmetrische Systeme mit nicht rotationssymmetrischen Verschiebungen /2/. In /2/ werden sowohl im diskretisierten Bereich als auch im Randelement alle ortsabhängigen Größen in eine Fourierreihe über den Öffnungswinkel des zylindrischen Koordinatensystems entwickelt. Aufgrund der Orthogonalitätsbeziehung lassen sich bei rotationssymmetrischen Modellen die Gleichungen für die einzelnen Fourierterme entkoppeln, so daß jedem Fourierterm der Belastung ein Fourierterm der Verschiebungen entspricht. Für das Randelement bedeutet dies, daß die Steifigkeitsmatrix die Beziehung zwischen einem Fourierterm der Randverschiebungen und einem Fourierterm der Randkräfte angibt. Die Beschreibung der Verschiebungen durch eine Fourier-Entwicklung über dem Öffnungswinkel wird hier nur für das Randelement beibehalten. Im diskretisierten Bereich werden dreidimensionale isoparametrische Elemente mit linearen oder quadratischen Ansatzfunktionen verwendet, bei denen die Verschiebungen in kartesischen Koordinaten beschrieben werden. Für den Rand des diskretisierten Bereichs lassen sich die Fourierglieder der Verschiebungen im Randelement durch die mit einer Transformationsmatrix multiplizierten Verschiebungen des diskretisierten Bereichs ausdrücken. Die Transformationsmatrix hängt dabei von der Ordnung des Fourierglieds sowie von den Ansatzfunktionen und der Anordnung der Elemente am Rand ab. Mit der Transponierten dieser Matrix lassen sich auch die Randkräfte des diskretisierten Bereichs als Summe aller Fourierglieder der Randkräfte im Randelement anschreiben. In dieser Beziehung drückt man die Fourierglieder der Randkräfte durch das Produkt aus der Steifigkeitsmatrix und dem entsprechenden Fourierglied der Verschiebungen aus und ersetzt die Fourierglieder der Verschiebungen durch die mit der Transformationsmatrix multiplizierten Randverschiebungen des diskretisierten Bereichs. Damit erhält man die Beziehung zwischen den Randkräften und Randverschiebungen, d.h. die Steifigkeitsmatrix des diskretisierten Bereichs. Die Steifigkeitsmatrix des nicht-rotationssymmetrischen Systems erhält man demnach aus den für jeweils einen

Fourierterm formulierten Steifigkeitsmatrizen des rotations-symmetrischen Systems durch Summation der entsprechend transformierten Matrizen über alle zu berücksichtigenden Fourierterme.

Häufig besitzen Systeme eine oder mehrere Symmetrieachsen. In diesem Fall läßt sich der Rechenaufwand durch Untersuchung eines Teilsystems wesentlich reduzieren. Auch beim Randelement braucht die Steifigkeitsmatrix nur für das Teilsystem formuliert zu werden. Dabei sind bei der Summation über die Fourierglieder nur diejenigen Terme zu berücksichtigen, die dieselben Symmetrieeigenschaften besitzen wie das untersuchte System.

Im Lastfall Erdbeben wird der in Finite Elemente diskretisierte Bereich sowohl durch die Verschiebung der das Modell nach unten begrenzenden starren Schicht als auch durch am Rand übertragene Kräfte erregt. Die Verschiebungen des Freifeldes werden nach der eindimensionalen Wellentheorie ermittelt. Dazu wird die analytische Lösung der Wellenausbreitung für geschichtete Böden nach dem Verfahren der Übertragungsmatrizen formuliert. Mit der Lösung für die Freifeldverschiebungen werden die Beziehungen für die am Rand des diskretisierten Bereichs angreifenden Kräfte aufgestellt.

Das Verfahren wird abschließend auf zwei Beispiele angewandt. Im ersten Beispiel wird die durch eine vertikale quadratische Flächenlast belastete elastische Schicht untersucht. Die numerische Lösung nach dem Verfahren der Finiten Elemente wird mit der analytischen Lösung nach /32/ verglichen. Dabei zeigt sich für alle untersuchten Schichthöhen eine gute Übereinstimmung zwischen beiden Lösungen.

Im zweiten Beispiel wird die Erdbebenbeanspruchung eines eingebetteten Bauwerks untersucht. Es handelt sich um ein beim Bau von Kernkraftwerken übliches Anlagengebäude mit einer Grundrißfläche von 30 x 60 m, einer Höhe von 20 m und einer Einbettungstiefe von 15 m. Der Boden wurde mit dreidimensionalen isoparametrischen Elementen, das Bauwerk selbst durch kombinierte Platten- und Scheibenelemente abgebildet. Zum Vergleich wird ein vereinfachtes Stabmodell untersucht, bei dem das Bauwerk durch biege- und

schubsteife Stäbe und der Baugrund durch frequenzabhängige Federn und Dämpfer abgebildet wird. Die Federn und Dämpfer sowie die Erregerfunktionen des Stabmodells werden an einem rotations-symmetrischen Bodenmodell nach dem Finite-Element-Verfahren ermittelt. Zum Vergleich der beiden Modellabbildungen werden einige Übertragungsfunktionen aufgestellt. Dabei wird die Erdbebenerregung einmal auf die das Bodenmodell nach unten begrenzende starre Schicht und in einem weiteren Lastfall auf das Freifeld bezogen. Es werden die beiden Fälle einer Bauwerksanregung in Richtung der Bauwerkslängsachse sowie senkrecht dazu untersucht. Mit den Übertragungsfunktionen werden für zwei natürliche Erdbeben Zeitverlaufsberechnungen durchgeführt. Sowohl die Übertragungsfunktionen als auch die Zeitverlaufsberechnungen zeigen, daß für praktische Anwendungen die Antwortschwingungen beider Modellabbildungen gut übereinstimmen. Dies bedeutet, daß auch bei ähnlichen eingebetteten, steifen Bauwerken mit rechteckigem Grundriß eine Abbildung des Bodens durch frequenzabhängige Federn und Dämpfer, die an einem rotationssymmetrischen Bodenmodell ermittelt werden, eine gute Näherung darstellt.

Literatur

- /1/ Waas, G. Linear Two-Dimensional Analysis of Soil Dynamics Problems in Semi-Infinite Layered Media. Dissertation, University of California, Berkeley, California, 1972.
- /2/ Kausel, E. Forced Vibrations of Circular Foundations on Layered Media. Massachusetts Institute of Technology, Research Report R74-11, 1974.
- /3/ Müller, F.P. Baudynamik, Betonkalender 1978, Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin, 1978.
- /4/ Hahn, H.-G. Methode der Finiten Elemente in der Festigkeitslehre, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1975.
- /5/ Fung, Y.C. Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- /6/ Zienkiewicz, O.C. The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw Hill, London, 1971.
- /7/ Gallagher, R.H. Finite-Element-Analysis. Springer Verlag, Berlin, 1976.
- /8/ Bathe, K.-J., Wilson, E. Numerical Methods in Finite-Element Analysis. Prentice - Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- /9/ Bathe, K.-J., Wilson, F.E., Peterson, W., Wunderlich. SAP IV - Beschreibung und Benutzerhandbuch, Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen, Nr. 75-14, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Okt. 1975.
- /10/ Duns, C.S., Butterfield, R. "The Dynamic Analysis of Soil-Structure Systems using the Finite Element Method", Inter-

national Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Aug. 1967, Albuquerque, Ed. G.E. Triandafilidis.

- /11/ Vaish, A.K., Chopra, A.K. "Earthquake Analysis of Structure-Foundation Systems." Report No. EERC 73-9, Berkeley, California, 1973.
- /12/ Vaish, A.K., Chopra, A.K. "Earthquake Finite Element Analysis of Structure-Foundation Systems", ASCE, EM6, Dez.1974.
- /13/ Seed, H.B., Lysmer, J., Wang, R.H. "Soil-Structure-Interaction Analysis for Evaluating Seismic Response", Earthquake Engineering Research Center, Report No. EERC74-6, Berkeley, California, April 1974.
- /14/ Chopra, A.K., Guttierrez, J.A. "Earthquake Analysis of Structures including Structure-Soil Interaction by a Substructure Method", 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, 1977, K 2/8.
- /15/ Arnold, P., Schrader, K.-H. "Ein Baugrundmodell zur Anwendung bei Schwingungsberechnungen von Kühltürmen", Teilarbeitsbericht zum 3. Berichtskolloquium "Bauwerke unter aerodynamischer Belastung", der Deutschen Forschungsgemeinschaft am 5. Oktober 1978 in Karlsruhe.
- /16/ Lysmer, J., Kuhlemeyer, R.L. "Finite Dynamic Model for Infinite Media." ASCE, EM4, 1969.
- /17/ Kuhlemeyer, R. "Vertical Vibrations of Footings Embedded in Layered Media", Diss. Univ. of California, Berkeley, 1969.
- /18/ Valliapan, S., White, W., Lee, I.K. "Energy Absorbing Boundary for Anisotropic Material", Num. Math. in Geom., Publ. by ASCE, Vol. II, 1976.
- /19/ Roesset, J.M., Ettouney, M.M. "Transmitting Boundaries: A

Comparison", International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, John Wiley and Sons, London, New York, Vol. 1, No. 2, 1977.

- /20/ Haupt, W. "Verhalten von Oberflächenwellen im inhomogenen Halbraum mit besonderer Berücksichtigung der Wellenabschirmung." Dissertation, Karlsruhe, 1978.
- /21/ Haupt, W.A. "Influence Matrix Boundary-Conditions for the Analysis of Dynamic Problems by FE-Method." In: Numerische Methoden der Bodenmechanik und Felsmechanik. Karlsruhe, 1975.
- /22/ Dasgupta, S.P., N.S.V. Kameswara Rao. "Dynamics of Rectangular Footings by Finite Elements", Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, May 1978
- /23/ Ulrich, C.M., R.L. Kuhlemeyer. "Coupled Rocking and Lateral Vibrations of Embedded Footings". Canadian Geotechnical Journal, Vol. 10, 1973.
- /24/ Tanaka, H., Ohta, T., Uchiyama, S. "Experimental and Analytical Studies of a Deeply Embedded Reactor Building Model Considering Soil-Building-Interaction (Part I)", 5th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin, Aug. 1979, K 7/8.
- /25/ Hwang, R.N., Lysmer, J., Berger, E. "A Simplified Three-Dimension Structure Interaction Study", Second ASCE Specialty Conference on Structural Design of Nuclear Plant Facilities, New Orleans, Dec. 1975.
- /26/ Lysmer, J., Udaka, T., Tsai, C.-F., Seed, H.B. "FLUSH - A Computer Program for Approximate 3-D-Analysis of Soil-Structure Interaction Problems." Earthquake Engineering Research Center, Report EERC 35-30, University of California, Berkeley, 1975.

- /27/ "Deterministic and Probabilistic Soil-Structure Interaction Analysis", Dynamical Methods in Soil and Rock Mechanics, Vol. 3, A.A. Balkema, Rotterdam, 1978.
- /28/ Sezawa, K. "Further Studies on Rayleigh Waves having some Azimuthal Distribution." Bull. Earthquake Research Institute, Tokyo, Vol. 6, 1929.
- /29/ Buck, K.E. "Rotationskörper unter beliebiger Belastung." In: Finite Elemente in der Statik. Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin, 1973.
- /30/ Seed, H.B., Lysmer, J. "Soil-Structure Interaction Analysis by Finite-Element Methods, State-of-the-Art", 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, 1977, K 2/1.
- /31/ Roesset, J.M. "Fundamentals of Soil Amplification." In: Hansen, R.J. Seismic design for nuclear power plants, M.I.T. Press, 1970.
- /32/ Kobori, T., Minai, R., Suzuki, T. "The Dynamical Ground Compliance of a Rectangular Foundation on a Viscoelastic Stratum." Bull. Disas. Res. Inst., Kyoto Univ., Vol. 20, 1971.
- /33/ Abramowitz, M., Stegun, I.A. Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, New York, 1965.
- /34/ Courant, R., Hilbert, D. Methoden der Mathematischen Physik I, Springer Verlag, Heidelberg, 1968.
- /35/ Werkle, H. "Determination of spring constants in SSI by a finite element method", Proceedings of DMSR 77, Karlsruhe, A.A. Balkema, Rotterdam, 1978.
- /36/ Kausel, E., Whitman, R.V., Morray, J.P., Elsabee, F. "The spring method for embedded foundations", Nucl. Eng. and Design 48, 1978, Seite 377-392.

- /37/ Waas, G., Weber, W. "Soil Structure Interaction Analysis by Different Methods", 5th Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin, 1979.
- /38/ Kausel, E., Roesset, J.M. "Dynamic Stiffness of Circular Foundations", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, EMG, Dec. 1975.
- /39/ Achilles, D. Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1978
- /40/ Cook, R.D. Concepts and Applications of Finite Element Analysis, J. Wiley, New York, 1974
- /41/ Kausel, E., Roesset, J.M., Waas, G. "Dynamic analysis of Footings on Layered Media", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, EM 5, Oct. 1975.

Anhang ASchichtmatrizen nach /2/:

Bei linearer Ansatzfunktion über die Höhe:

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{\underline{A}}_s \\ \tilde{\underline{A}}_s \end{array} \right] = \frac{h_s}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & \underline{\lambda}+2\underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & 2\underline{G} & 0 & 0 & \underline{G} & 0 \\ 0 & 0 & 2\underline{G} & 0 & 0 & \underline{G} \\ \underline{\lambda}+2\underline{G} & 0 & 0 & 2(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 \\ 0 & \underline{G} & 0 & 0 & 2\underline{G} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{G} & 0 & 0 & 2\underline{G} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{\underline{B}}_s \\ \tilde{\underline{B}}_s \end{array} \right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \underline{\lambda}-\underline{G} & 0 & 0 & -(\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 \\ \underline{\lambda}-\underline{G} & 0 & 0 & \underline{\lambda}+\underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\lambda}+\underline{G} & 0 & 0 & (\underline{\lambda}-\underline{G}) & 0 \\ -(\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 & 0 & -(\underline{\lambda}-\underline{G}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{\underline{G}}_s \\ \tilde{\underline{G}}_s \end{array} \right] = \frac{1}{h_s} \cdot \begin{bmatrix} \underline{G} & 0 & 0 & -\underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\lambda}+2\underline{G} & 0 & 0 & -(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 \\ 0 & 0 & \underline{G} & 0 & 0 & -\underline{G} \\ -\underline{G} & 0 & 0 & \underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & -(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & \underline{\lambda}+2\underline{G} & 0 \\ 0 & 0 & -\underline{G} & 0 & 0 & \underline{G} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_s \end{bmatrix} = \frac{\rho h_s}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_s \end{bmatrix} = \frac{Gh_s}{3r_o} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{D}_s \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \underline{\lambda} & 0 & 0 & -\underline{\lambda} & 0 \\ -\underline{G} & 0 & 0 & \underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\lambda} & 0 & 0 & -\underline{\lambda} & 0 \\ -\underline{G} & 0 & 0 & \underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_s \end{bmatrix} = \frac{Gh_s}{6r_o} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{L}_s \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \frac{G h_s}{r_o^2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_s \end{bmatrix} = \frac{G}{2r_o} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bei quadratischer Ansatzfunktion über die Höhe:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_s \end{bmatrix} = \frac{h_s}{30} \begin{bmatrix} 4(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & 2(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & -(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 \\ 0 & 4\underline{G} & 0 & 0 & 2\underline{G} & 0 & 0 & -\underline{G} & 0 \\ 0 & 0 & 4\underline{G} & 0 & 0 & 2\underline{G} & 0 & 0 & -\underline{G} \\ 2(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & 6(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & 2(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 \\ 0 & 2\underline{G} & 0 & 0 & 16\underline{G} & 0 & 0 & 2\underline{G} & 0 \\ 0 & 0 & 2\underline{G} & 0 & 0 & 16\underline{G} & 0 & 0 & 2\underline{G} \\ -(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & 2(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & 4(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{G} & 0 & 0 & 2\underline{G} & 0 & 0 & 4\underline{G} & 0 \\ 0 & 0 & -\underline{G} & 0 & 0 & 2\underline{G} & 0 & 0 & 4\underline{G} \end{bmatrix}$$

$$\left[\tilde{\underline{B}}_s \right] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 3(\underline{\lambda}-\underline{G}) & 0 & 0 & -4(\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 & 0 & (\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 \\ 3(\underline{\lambda}-\underline{G}) & 0 & 0 & 4(\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 & 0 & -(\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4(\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4(\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 \\ -4(\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4(\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 & 0 & 4(\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 & 0 & -3(\underline{\lambda}-\underline{G}) & 0 \\ (\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 & 0 & -4(\underline{\lambda}+\underline{G}) & 0 & 0 & -3(\underline{\lambda}-\underline{G}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\tilde{\underline{G}}_s \right] = \frac{1}{3h_s} \begin{bmatrix} 7\underline{G} & 0 & 0 & -8\underline{G} & 0 & 0 & \underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & 7(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & -8(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & (\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 \\ 0 & 0 & 7\underline{G} & 0 & 0 & -8\underline{G} & 0 & 0 & \underline{G} \\ -8\underline{G} & 0 & 0 & 16\underline{G} & 0 & 0 & -8\underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & -8(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & 16(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & -8(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 \\ 0 & 0 & -8\underline{G} & 0 & 0 & 16\underline{G} & 0 & 0 & -8\underline{G} \\ \underline{G} & 0 & 0 & -8\underline{G} & 0 & 0 & 7\underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & (\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & -8(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 & 0 & 7(\underline{\lambda}+2\underline{G}) & 0 \\ 0 & 0 & \underline{G} & 0 & 0 & -8\underline{G} & 0 & 0 & 7\underline{G} \end{bmatrix}$$

$$\left[\tilde{\underline{M}}_s \right] = \frac{\rho h_s}{30} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\tilde{F}}{s} \right] = \frac{Gh_s}{15r_o} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\tilde{D}}{s} \right] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 3\underline{\lambda} & 0 & 0 & -4\underline{\lambda} & 0 & 0 & \underline{\lambda} & 0 \\ -3\underline{G} & 0 & 0 & 4\underline{G} & 0 & 0 & -\underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\underline{\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\underline{\lambda} & 0 \\ -4\underline{G} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{\lambda} & 0 & 0 & 4\underline{\lambda} & 0 & 0 & -3\underline{\lambda} & 0 \\ \underline{G} & 0 & 0 & -4\underline{G} & 0 & 0 & 3\underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\frac{\tilde{N}}{s} \right] = \frac{Gh_s}{30r_o} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{L}_s \\ \tilde{M}_s \end{bmatrix} = \frac{2Gh_s}{15r_o^2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 16 & 0 & -16 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -16 & 0 & 16 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_s \end{bmatrix} = \frac{G}{6r_o} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -4 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 0 & -4 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrix $\begin{bmatrix} B_k \end{bmatrix}$ nach Gl. (5.23):

Führt man die Schreibweise

$$\underline{H}_n = \underline{H}_n(\underline{k}_v \cdot r)$$

$$\underline{H}'_n = \frac{\partial \underline{H}_n(\underline{k}_v \cdot r)}{\partial r}$$

ein, so hat die Matrix $\begin{bmatrix} B_k \end{bmatrix}$ die Form:

1	2	3
$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1-\eta) \underline{H}_n'' \\ & \frac{1}{2} (1-\eta) \left(\frac{1}{2} \underline{H}_n' - \frac{n^2}{r^2} \underline{H}_n \right) \\ & 0 \\ & \frac{1}{h_s} \cdot \underline{H}_n' \\ & (1-\eta) \cdot \frac{n}{r} \left(\underline{H}_n' - \frac{1}{r} \underline{H}_n \right) \\ & \frac{1}{h_s} \cdot \frac{n}{r} \cdot \underline{H}_n \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0 \\ & 0 \\ & \frac{k_\nu}{h_s} \cdot \underline{H}_n \\ & \frac{1}{2} (1-\eta) \cdot \underline{k}_\nu \cdot \underline{H}_n' \\ & 0 \\ & \frac{1}{2} (1-\eta) \cdot \underline{k}_\nu \cdot \frac{n}{r} \cdot \underline{H}_n \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1-\eta) \frac{n}{r} \left(\underline{H}_n' - \frac{1}{r} \underline{H}_n \right) \\ & \frac{1}{2} (\eta-1) \frac{n}{r} \left(\underline{H}_n' - \frac{1}{r} \underline{H}_n \right) \\ & 0 \\ & \frac{1}{h_s} \cdot \frac{n}{r} \cdot \underline{H}_n \\ & \frac{1}{2} (1-\eta) \left(\underline{H}_n'' - \frac{1}{r} \underline{H}_n' \right) \\ & \frac{1}{h_s} \cdot \underline{H}_n' \end{aligned}$
4	5	6
$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1+\eta) \underline{H}_n'' \\ & \frac{1}{2} (1+\eta) \left(\frac{1}{r} \underline{H}_n' - \frac{n^2}{r^2} \underline{H}_n \right) \\ & 0 \\ & - \frac{1}{h_s} \cdot \underline{H}_n' \\ & (1+\eta) \frac{n}{r} \left(\underline{H}_n' - \frac{1}{r} \underline{H}_n \right) \\ & - \frac{1}{h_s} \cdot \frac{n}{r} \cdot \underline{H}_n \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0 \\ & 0 \\ & - \frac{k_\nu}{h_s} \cdot \underline{H}_n \\ & \frac{1}{2} (1+\eta) \cdot \underline{k}_\nu \cdot \underline{H}_n' \\ & 0 \\ & \frac{1}{2} (1+\eta) \cdot \underline{k}_\nu \cdot \frac{n}{r} \cdot \underline{H}_n \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1+\eta) \frac{n}{r} \left(\underline{H}_n' - \frac{1}{r} \underline{H}_n \right) \\ & - \frac{1}{2} (1+\eta) \frac{n}{r} \left(\underline{H}_n' - \frac{1}{r} \underline{H}_n \right) \\ & 0 \\ & - \frac{1}{h_s} \cdot \frac{n}{r} \cdot \underline{H}_n \\ & \frac{1}{2} (1+\eta) \left(\underline{H}_n'' - \frac{1}{r} \underline{H}_n' + \frac{n^2}{r^2} \underline{H}_n \right) \\ & - \frac{1}{h_s} \underline{H}_n' \end{aligned}$

bei linearer Ansatzfunktion und

1	2	3
$\frac{1}{2}(\eta^2 - \eta) \cdot \underline{H}_n''$ $\frac{1}{2}(\eta^2 - \eta) \left(\frac{\underline{H}_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} \underline{H}_n \right)$ 0 $- \frac{1}{h_s} (2\eta - 1) \cdot \underline{H}_n'$ $(\eta^2 - \eta) \frac{n}{r} \left(\underline{H}_n' - \frac{\underline{H}_n}{r} \right)$ $\frac{1}{h_s} (-2\eta + 1) \frac{n}{r} \underline{H}_n$	0 0 $(-2\eta + 1) \cdot \underline{k}_\nu \cdot \underline{H}_n$ $\frac{1}{2} (\eta^2 - \eta) \cdot \underline{k}_\nu \cdot \underline{H}_n'$ 0 $\frac{1}{2} (\eta^2 - \eta) \cdot \underline{k}_\nu \cdot \frac{n}{r} \cdot \underline{H}_n$	$\frac{1}{2} (\eta^2 - \eta) \frac{n}{r} \left(\underline{H}_n' - \frac{\underline{H}_n}{r} \right)$ $- \frac{1}{2} (\eta^2 - \eta) \cdot \frac{n}{r} \cdot \left(\underline{H}_n' - \frac{\underline{H}_n}{r} \right)$ 0 $- \frac{1}{h_s} (2\eta - 1) \frac{n}{r} \cdot \underline{H}_n$ $\frac{1}{2} (\eta^2 - \eta) \left(\underline{H}_n'' - \frac{1}{r} \underline{H}_n' + \frac{n^2}{r^2} \underline{H}_n \right)$ $\frac{1}{h_s} (-2\eta + 1) \cdot \underline{H}_n'$
4	5	6
$(1 - \eta^2) \underline{H}_n''$ $(1 - \eta^2) \left(\frac{\underline{H}_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} \underline{H}_n \right)$ 0 $+ \frac{4\eta}{h_s} \cdot \underline{H}_n'$ $2(1 - \eta^2) \frac{n}{r} \left(\underline{H}_n' - \frac{\underline{H}_n}{r} \right)$ $\frac{1}{h_s} (-2\eta + 1) \frac{n}{r} \underline{H}_n$	0 0 $\frac{4\eta}{h_s} \cdot \underline{k}_\nu \cdot \underline{H}_n$ $(1 - \eta^2) \cdot \underline{k}_\nu \cdot \underline{H}_n'$ 0 $(1 - \eta^2) \cdot \underline{k}_\nu \cdot \frac{n}{r} \underline{H}_n$	$(1 - \eta^2) \cdot \frac{n}{r} \left(\underline{H}_n' - \frac{\underline{H}_n}{r} \right)$ $- (1 - \eta^2) \frac{n}{r} \left(\underline{H}_n' - \frac{\underline{H}_n}{r} \right)$ 0 $\frac{4\eta}{h_s} \cdot \frac{n}{r} \cdot \underline{H}_n$ $(1 - \eta^2) \cdot \left(\underline{H}_n'' - \frac{1}{r} \underline{H}_n' + \frac{n^2}{r^2} \underline{H}_n \right)$ $\frac{1}{h_s} (-2\eta + 1) \underline{H}_n'$

7	8	9
$\frac{1}{2} (\eta^2 + \eta) \frac{H_n''}{r}$	0	$\frac{1}{2} (\eta^2 + \eta) \left(\frac{H_n'}{r} - \frac{H_n}{r^2} \right)$
$\frac{1}{2} (\eta^2 + \eta) \left(\frac{H_n'}{r} - \frac{n^2}{r} \frac{H_n}{r} \right)$	0	$-\frac{1}{2} (\eta^2 + \eta) \left(\frac{H_n'}{r} - \frac{H_n}{r} \right)$
0	$-\frac{1}{h_s} (2\eta + 1) \cdot k_\nu \cdot \frac{H_n}{r}$	0
$-\frac{1}{h_s} (2\eta + 1) \cdot \frac{H_n'}{r}$	$\frac{1}{2} (\eta^2 + \eta) \cdot k_\nu \cdot \frac{H_n'}{r}$	$-\frac{1}{h_s} (2\eta + 1) \frac{n}{r} \frac{H_n}{r}$
$(\eta^2 + \eta) \frac{n}{r} \left(\frac{H_n'}{r} - \frac{H_n}{r} \right)$	0	$\frac{1}{2} (\eta^2 + \eta) \left(\frac{H_n''}{r} - \frac{1}{r} \frac{H_n'}{r} + \frac{n^2}{r^2} \frac{H_n}{r} \right)$
$\frac{1}{h_s} (-2\eta + 1) \frac{H_n'}{r} \cdot \frac{n}{r}$	$\frac{1}{2} (\eta^2 + \eta) k_\nu \cdot \frac{n}{r} \cdot \frac{H_n}{r}$	$\frac{1}{h_s} (-2\eta + 1) \frac{H_n'}{r}$

bei quadratischer Ansatzfunktion.

Anhang BAnnäherung eines Kreises durch stückweise Parabeln zweiter Ordnung

Bei Verwendung von benachbarten Finiten Elementen unterschiedlicher Randgeometrie entstehen Ungenauigkeiten in der Bildung der Elementsteifigkeitsmatrizen. Im Fall des dreidimensionalen Randelementes wird die Form des Randes durch einen Kreis, die des vom Randelement umschlossenen Baugrundmodells jedoch stückweise durch Parabeln zweiter Ordnung beschrieben. Zur Abschätzung des dabei entstehenden Fehlers wird der bezogene Abstand $\Delta r/b$ und die bezogene Flächendifferenz $\Delta F/F$ gebildet (siehe Bild 10). Dabei bedeutet b die Bogenlänge des Kreises, entsprechend der Seitenlänge eines Elements und $F = b^2$ die Grundfläche eines Elements der Kantenlänge b .

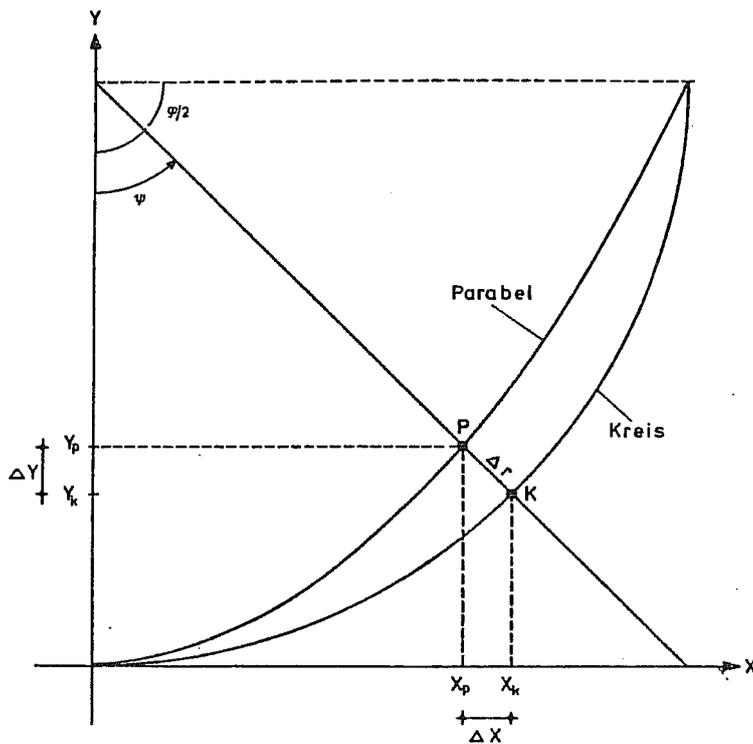


Bild A1: Annäherung eines Kreises durch stückweise Parabeln zweiter Ordnung

Der Kreis, d.h. die Begrenzung des Randelementes wird beschrieben durch

$$x_k = r \cdot \sin \psi \quad (\text{B1})$$

$$y_k = r \cdot (1 - \cos \psi), \quad (\text{B2})$$

die Parabel durch

$$y_p = a \cdot x_p^2 \quad (\text{B3})$$

In den Randpunkten $\psi = \pm \varphi/2$ fallen Kreis und Parabel zusammen, d.h. es gilt: $x_p = x_k$, $y_p = y_k$ und man erhält mit Gl. (B1) bis (B3)

$$a = \frac{1 - \cos \varphi/2}{r_o \cdot \sin^2 \varphi/2} \quad (\text{B4})$$

und

$$y_p = \frac{1 - \cos \varphi/2}{r_o \cdot \sin^2 \varphi/2} x_p^2 \quad (\text{B5})$$

Weiterhin gilt (vergl. Bild A1):

$$y_p = r_o - \frac{1}{\tan \psi} \cdot x_p = \frac{1 - \cos \varphi/2}{r_o \cdot \sin^2 \varphi/2} x_p^2 \quad (\text{B6})$$

oder

$$\frac{1 - \cos \varphi/2}{r_o \cdot \sin^2 \varphi/2} x_p^2 + \frac{1}{\tan \psi} x_p - r_o = 0 \quad (\text{B6})$$

Löst man Gl. (B6) nach x_p auf, dann erhält man x_p als Funktion des Winkels ψ zu:

$$x_p = a_1^* \frac{1}{\tan \psi} - a_1^* \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \psi} + a_2^*} r_o \quad (\text{B7})$$

mit

$$a_1^* = \frac{-\sin^2 \varphi/2}{2(1 - \cos \varphi/2)} \quad (\text{B7a})$$

$$a_2^* = 4 \frac{1 - \cos \varphi/2}{\sin^2 \varphi/2} = -\frac{2}{a_1} \quad (\text{B7b})$$

Mit Gl. (B5) und (B7) erhält man y_p als Funktion des Winkels zu:

$$y_p = \left\{ 1 - a_1^* \frac{1}{\tan^2 \psi} + a_1^* \frac{1}{\tan \psi} \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \psi} + a_2^*} \cdot r_o \right\} \quad (\text{B8})$$

Damit ergibt sich die Differenz zwischen den x- und y-Koordinaten von Kreis und Parabel zu:

$$\Delta x = x_k - x_p$$

$$\Delta x = \left(\sin \psi - a_1^* \frac{1}{\tan \psi} + a_1^* \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \psi} + a_2^*} \right) r_o \quad (\text{B9})$$

$$\Delta y = y_k - y_p$$

$$\Delta y = \left(-\cos \psi + a_1^* \frac{1}{\tan^2 \psi} - a_1^* \frac{1}{\tan \psi} \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \psi} + a_2^*} \right) r_o \quad (\text{B10})$$

Der auf die Länge des Kreisbogens zwischen $\psi = -\varphi/2$ und $\psi = +\varphi/2$ bezogene Abstand zwischen Kreis und Parabel erhält man dann aus der Beziehung:

$$\frac{\Delta r}{b} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\varphi \cdot r_o} \quad (\text{B11})$$

Nach Gl. (B9) und (B10) hängen Δx und Δy noch vom Winkel ψ ab. In Bild 11 sind die bezogenen Abstände $\Delta r/b$ als Maxima der jeweils über alle Winkel $0 \leq \psi \leq \varphi/2$ erhaltenen Werte in Abhängigkeit von φ aufgetragen.

Zur Ermittlung der Flächendifferenz wird zunächst die Fläche unter

der Parabel durch Integration ermittelt. Unter Berücksichtigung von Gl. (B5) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_{\text{par}} &= \int_0^{r_0 \cdot \sin \varphi/2} \frac{1 - \cos \varphi/2}{r_0 \cdot \sin^2 \varphi/2} \cdot x_p^2 \cdot dx_p \\ &= \frac{2}{3} \sin \varphi/2 (1 - \cos(\varphi/2)) r_0^2 \end{aligned} \quad (\text{B12})$$

Entsprechend berechnet man die Fläche unter dem Kreisbogen zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_{\text{Kreis}} &= \int_0^{r_0 \cdot \sin \varphi/2} y_k \cdot dx_k \\ &= \int_0^{r_0 \cdot \sin \varphi/2} (r_0 - \sqrt{r_0^2 - x_k^2}) dx_k \\ &= r_0^2 (2 \cdot \sin(\varphi/2) - \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2) - (\varphi/2)) \end{aligned} \quad (\text{B13})$$

Die auf das Quadrat der Bogenlänge $b^2 = \varphi^2 \cdot r_0^2$ bezogene Flächen-
differenz lautet damit

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{b^2} &= \frac{F_{\text{par}} - F_{\text{Kreis}}}{\varphi^2 \cdot r_0^2} \\ \frac{\Delta F}{b^2} &= \frac{\varphi + \frac{1}{6} \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2) - \frac{8}{3} \sin(\varphi/2)}{\varphi^2} \end{aligned} \quad (\text{B14})$$

Anhang C

Numerische Berechnung der Matrizen $[S_{el}]$ und $[A_{el}]$

Die Matrizen $[S_{el}]$ und $[A_{el}]$ sind definiert durch:

$$[S_{el}] = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} [\theta_{sym}] [N_{\xi}] d\varphi \quad (5.66a)$$

$$[A_{el}] = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} [\theta_{ant}] [N_{\xi}] d\varphi \quad (5.66b)$$

Sowohl $[\theta_{sym}]$, $[\theta_{ant}]$ als auch $[N_{\xi}]$ hängen von φ ab. Die Matrix $[N_{\xi}]$ kann nun dargestellt werden in der Form:

$$[N_{\xi}] = [N_{\xi 0}] + \varphi \cdot [N_{\xi 1}] + \varphi^2 \cdot [N_{\xi 2}] \quad (C1)$$

wobei $[N_{\xi 0}]$, $[N_{\xi 1}]$, $[N_{\xi 2}]$ von φ unabhängig sind.

Mit den Gleichungen (5.54 a,b) und den Funktionen $f_{i,j}$ nach Tabelle 2 bzw.3 erhält man sie zu:

- Bei linearer Ansatzfunktion:

$$[N_{\xi 0}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & \alpha_2 \cdot [I_3] & \alpha_1 \cdot [I_3] & [0] & \alpha_3 \cdot [I_3] \\ \alpha_1 \cdot [I_3] & \alpha_2 \cdot [I_3] & [0] & [0] & \alpha_3 \cdot [I_3] & [0] \end{bmatrix} \quad (C2a)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2^2)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} (-a_1 + a_2^2)$$

$$\alpha_3 = 1 - a_1^2$$

$$\left[N_{\xi 1} \right] = \begin{bmatrix} \left[0 \right] & \left[0 \right] & \beta_2 \cdot \left[I_3 \right] & \beta_1 \cdot \left[I_3 \right] & \left[0 \right] & \beta_3 \cdot \left[I_3 \right] \\ \beta_1 \cdot \left[I_3 \right] & \beta_2 \cdot \left[I_3 \right] & \left[0 \right] & \left[0 \right] & \beta_3 \cdot \left[I_3 \right] & \left[0 \right] \end{bmatrix} \quad (C2b)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} (-a_2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} (a_2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_2)$$

$$\beta_3 = 2 a_1 a_2$$

$$\left[N_{\xi 2} \right] = \begin{bmatrix} \left[0 \right] & \left[0 \right] & \gamma_2 \cdot \left[I_3 \right] & \gamma_1 \cdot \left[I_3 \right] & \left[0 \right] & \gamma_3 \cdot \left[I_3 \right] \\ \gamma_1 \cdot \left[I_3 \right] & \gamma_2 \cdot \left[I_3 \right] & \left[0 \right] & \left[0 \right] & \gamma_3 \cdot \left[I_3 \right] & \left[0 \right] \end{bmatrix} \quad (C2c)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} a_2^2$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} a_2^2$$

$$\gamma_3 = -a_2^2$$

- Bei quadratischer Ansatzfunktion:

$$\left[N_{\xi 0} \right] = \begin{bmatrix} \left[0 \right] & \left[0 \right] & \alpha_3 \cdot \left[I_3 \right] & \alpha_2 \cdot \left[I_3 \right] & \left[0 \right] & \left[0 \right] & \alpha_5 \cdot \left[I_3 \right] & \left[0 \right] \\ \alpha_1 \cdot \left[I_3 \right] & \alpha_4 \cdot \left[I_3 \right] & \alpha_6 \cdot \left[I_3 \right] & \alpha_4 \cdot \left[I_3 \right] & \alpha_7 \cdot \left[I_3 \right] \\ \alpha_2 \cdot \left[I_3 \right] & \alpha_3 \cdot \left[I_3 \right] & \left[0 \right] & \left[0 \right] & \alpha_5 \cdot \left[I_3 \right] & \left[0 \right] & \left[0 \right] & \left[0 \right] \end{bmatrix} \quad (C3a)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} (a_1^2 - 1)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} a_1 (1 + a_1)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} a_1 (a_1 - 1)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} (-a_1^2 + 1)$$

$$\alpha_5 = 1 - a_1^2$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{2} (1 - a_1)$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{2} (1 + a_1)$$

$$[N_{\xi 1}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & \beta_3 [I_3] & \beta_2 [I_3] & [0] & [0] & \beta_5 [I_3] & [0] \\ \beta_1 [I_3] & \beta_1 [I_3] & \beta_1 [I_3] & \beta_1 [I_3] & \beta_4 [I_3] & \beta_4 [I_3] & \beta_4 [I_3] & \beta_7 [I_3] \\ \beta_2 [I_3] & \beta_3 [I_3] & [0] & [0] & \beta_5 [I_3] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}$$

(C3b)

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} a_1 a_2$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2} a_2 (1 + 2 a_1)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2} a_2 (1 - 2 a_1)$$

$$\beta_4 = a_1 a_2$$

$$\beta_5 = 2 a_1 a_2$$

$$\beta_6 = \frac{1}{2} a_2$$

$$\beta_7 = -\frac{1}{2} a_2$$

$$[N_{\xi 2}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & \gamma_2 [I_3] & \gamma_2 [I_3] & [0] & [0] & \gamma_4 [I_3] & [0] \\ \gamma_1 [I_3] & \gamma_1 [I_3] & \gamma_1 [I_3] & \gamma_1 [I_3] & \gamma_3 [I_3] & [0] & \gamma_3 [I_3] & [0] \\ \gamma_2 [I_3] & \gamma_2 [I_3] & [0] & [0] & \gamma_4 [I_3] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}$$

(C3c)

$$\gamma_1 = \frac{1}{4} a_2^2$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} a_2^2$$

$$\gamma_3 = -\frac{1}{2} a_2^2$$

$$\gamma_4 = -a_2^2$$

Mit diesen Beziehungen erhält man $[S_{el}]$ und $[A_{el}]$ nach Gl. (5.66a), (5.66b) zu:

$$\begin{aligned} [S_{el}] &= \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} [\theta_{sym}] \cdot d\varphi \cdot [N_{\xi 0}] + \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} [\theta_{sym}] \cdot d\varphi \cdot [N_{\xi 1}] \\ &\quad + \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \varphi^2 [\theta_{sym}] \cdot d\varphi \cdot [N_{\xi 2}] \\ [A_{el}] &= \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} [\theta_{ant}] \cdot d\varphi \cdot [N_{\xi 0}] + \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} [\theta_{ant}] \cdot d\varphi \cdot [N_{\xi 1}] \\ &\quad + \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \varphi^2 [\theta_{ant}] \cdot d\varphi \cdot [N_{\xi 2}] \end{aligned} \quad (C4)$$

Die Matrizen $[\theta_{sym}]$ und $[\theta_{ant}]$ setzen sich nach Gl. (5.63a), (5.63b) bzw. (5.64a), (5.64b) aus den Untermatrizen $[T_{sym}]$ und $[T_{ant}]$ zusammen:

$$[T_{sym}] = [\Phi_{sym,n}] \cdot [T]^T \quad (5.65a)$$

$$[T_{ant}] = [\Phi_{ant,n}] \cdot [T]^T \quad (5.65b)$$

Die Matrizen $[\Phi_{sym,n}]$, $[\Phi_{ant,n}]$ und $[T]^T$ sind durch die Gleichungen (5.1) bzw. (5.48) definiert. Man erhält:

$$[T_{sym}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cdot \cos n\varphi & \sin \varphi \cdot \cos n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\varphi \\ \sin \varphi \cdot \sin n\varphi & -\cos \varphi \cdot \sin n\varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (C5a)$$

$$\left[T_{\text{ant}} \right] = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cdot \sin n\varphi & \sin \varphi \cdot \sin n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sin n\varphi \\ -\sin n\varphi \cdot \cos n\varphi & \cos \varphi \cdot \cos n\varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C5b})$$

Zur Bildung der Integrale in Gl. (C4) werden folgende Ausdrücke benötigt:

$$\int \left[T_{\text{sym}} \right] d\varphi = \begin{bmatrix} I_7 & I_{13} & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \\ I_{16} & -I_{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C6a})$$

$$\int \left[T_{\text{sym}} \right] \varphi d\varphi = \begin{bmatrix} I_8 & I_{14} & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \\ I_{17} & I_{11} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C6b})$$

$$\int \left[T_{\text{sym}} \right] \varphi^2 d\varphi = \begin{bmatrix} I_9 & I_{15} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \\ I_{15} & -I_{12} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C6c})$$

$$\int \left[T_{\text{ant}} \right] d\varphi = \begin{bmatrix} I_{10} & I_{16} & 0 \\ 0 & 0 & I_4 \\ -I_{13} & I_7 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C6d})$$

$$\int \left[T_{\text{ant}} \right] \varphi d\varphi = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{17} & 0 \\ 0 & 0 & I_5 \\ -I_{14} & I_8 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C6e})$$

$$\int \left[T_{\text{ant}} \right] \varphi^2 d\varphi = \begin{bmatrix} I_{12} & I_{18} & 0 \\ 0 & 0 & I_6 \\ -I_{15} & I_9 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C6f})$$

Die Integrale I_1 bis I_{18} sind definiert durch:

$$I_1 = \int \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$I_2 = \int \varphi \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$I_3 = \int \varphi^2 \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$I_4 = \int \sin n\varphi \, d\varphi$$

$$I_5 = \int \varphi \sin n\varphi \, d\varphi$$

$$I_6 = \int \varphi^2 \sin n\varphi \, d\varphi$$

$$I_7 = \int \cos\varphi \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$I_8 = \int \varphi \cos\varphi \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$I_9 = \int \varphi^2 \cos\varphi \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$I_{10} = \int \cos\varphi \sin n\varphi \, d\varphi$$

$$I_{11} = \int \varphi \cos\varphi \sin n\varphi \, d\varphi$$

$$I_{12} = \int \varphi^2 \cos\varphi \sin n\varphi \, d\varphi$$

$$I_{13} = \int \sin\varphi \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$I_{14} = \int \varphi \sin\varphi \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$I_{15} = \int \varphi^2 \sin\varphi \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$I_{16} = \int \sin\varphi \sin n\varphi \, d\varphi$$

$$I_{17} = \int \varphi \sin\varphi \sin n\varphi \, d\varphi$$

$$I_{18} = \int \varphi^2 \sin\varphi \sin n\varphi \, d\varphi$$

(C7)

Diese Integrale werden unter Verwendung folgender Hilfsgrößen gelöst:

$$\begin{aligned}
H1(m) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos m\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{1}{m} (\sin m\varphi_2 - \sin m\varphi_1) \quad \text{für } m \neq 0 \\
&= \varphi_2 - \varphi_1 \quad \text{für } m = 0
\end{aligned} \tag{C8}$$

$$\begin{aligned}
H2(m) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \cos m\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{1}{m^2} (\cos m\varphi_2 - \cos m\varphi_1) \\
&\quad + \frac{1}{m} (\varphi_2 \sin m\varphi_2 - \varphi_1 \sin m\varphi_1) \quad \text{für } m \neq 0 \\
&= \frac{1}{2} (\varphi_2^2 - \varphi_1^2) \quad \text{für } m = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H3(m) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 \cos m\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{2}{m^3} (-\sin m\varphi_2 + \sin m\varphi_1) \\
&\quad + \frac{2}{m^2} (\varphi_2 \cos m\varphi_2 - \varphi_1 \cos m\varphi_1) \quad \text{für } m \neq 0 \\
&\quad + \frac{1}{m} (\varphi_2^2 \sin m\varphi_2 - \varphi_1^2 \sin m\varphi_1) \\
&= \frac{1}{3} (\varphi_2^3 - \varphi_1^3) \quad \text{für } m = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H4(m) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin m\varphi \, d\varphi \\
&= -\frac{1}{m} (\cos m\varphi_2 - \cos m\varphi_1) \quad \text{für } m \neq 0 \\
&= 0 \quad \text{für } m = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H5(m) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \sin m\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{1}{m^2} (\sin m\varphi_2 - \sin m\varphi_1) \\
&= -\frac{1}{m} (\varphi_2 \cos m\varphi_2 - \varphi_1 \cos m\varphi_1) && \text{für } m \neq 0 \\
&= 0 && \text{für } m = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H6(m) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi^2 \sin m\varphi \, d\varphi \\
&= \frac{2}{m^3} (\cos m\varphi_2 - \cos m\varphi_1) \\
&\quad + \frac{2}{m^2} (\varphi_2 \sin m\varphi_2 - \varphi_1 \sin m\varphi_1) \\
&\quad + \frac{1}{m} (-\varphi_2^2 \cos m\varphi_2 + \varphi_1^2 \cos m\varphi_1) && \text{für } m \neq 0 \\
&= 0 && \text{für } m = 0
\end{aligned}$$

Damit sind die Integrale I_1 bis I_{18} zu berechnen nach:

$$I_1 = H1(n)$$

$$I_2 = H2(n)$$

$$I_3 = H3(n)$$

$$I_4 = H4(n)$$

$$I_5 = H5(n)$$

$$I_6 = H6(n)$$

$$I_7 = \frac{1}{2} H1(1 - n) + \frac{1}{2} H1(1 + n)$$

$$I_8 = \frac{1}{2} H2(1 - n) + \frac{1}{2} H2(1 + n)$$

$$I_9 = \frac{1}{2} H3(1 - n) + \frac{1}{2} H3(1 + n)$$

$$I_{10} = \frac{1}{2} H4(n - 1) + \frac{1}{2} H4(n + 1)$$

$$I_{11} = \frac{1}{2} H5(n - 1) + \frac{1}{2} H5(n + 1)$$

$$I_{12} = \frac{1}{2} H6(n - 1) + \frac{1}{2} H6(n + 1)$$

$$I_{13} = \frac{1}{2} H4(1 - n) + \frac{1}{2} H4(1 + n)$$

$$I_{14} = \frac{1}{2} H5(1 - n) + \frac{1}{2} H5(1 + n)$$

$$I_{15} = \frac{1}{2} H6(1 - n) + \frac{1}{2} H6(1 + n)$$

$$I_{16} = \frac{1}{2} H1(1 - n) - \frac{1}{2} H1(1 + n)$$

$$I_{17} = \frac{1}{2} H2(1 - n) - \frac{1}{2} H2(1 + n)$$

$$I_{18} = \frac{1}{2} H3(1 - n) - \frac{1}{2} H3(1 + n)$$

(C9)

Anhang DBerechnung der Hankel-Funktionen

Die Hankel-Funktionen der zweiten Art von der Ordnung n werden mit den Bessel-Funktionen $I_n(z)$ und $Y_n(z)$ definiert zu:

$$H_n(z) = I_n(z) - i \cdot Y_n(z) \quad (D1)$$

mit dem komplexen Argument z . Ihre numerische Berechnung führt man zweckmäßigerweise mit Hilfe einer Reihenentwicklung durch, da dabei numerische Schwierigkeiten, wie sie bei einer direkten Bildung der Differenz nach Gl. (D1) auftreten können, vermieden werden. Die Reihendarstellung der Besselschen Funktionen $I_n(z)$ und $Y_n(z)$ erhält man nach /33/ zu:

$$I_n(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^n \cdot \sum_{k=0}^n \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k! \cdot (n+k)!} \quad (D2)$$

$$\begin{aligned} Y_n(z) = & -\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4}z^2\right)^k \\ & + \frac{2}{\pi} \cdot \ln\left|\frac{1}{2}z\right| \cdot I_n(z) \\ & - \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (\psi(k+1) + \psi(n+k+1)) \cdot \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k! (n+k)!} \end{aligned} \quad (D3)$$

wobei $\psi(n)$ definiert ist zu

$$\psi(1) = -\gamma = -0.5772156649 \text{ (Eulersche Konstante)}$$

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1} \text{ für } n \geq 2 \quad (D4)$$

Setzt man (D2) und (D3) in (D1) ein, dann erhält man nach einigen

Umformungen die Summenformel für die Hankel-Funktionen zu

$$\begin{aligned}
 \underline{H}_n(z) = & \underline{a}_0 + \left(\frac{z}{2}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\underline{a}_1 + \frac{2i}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+n} \right) \right) \right) \cdot \\
 & \cdot \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k! (n+k)!}
 \end{aligned} \tag{D5}$$

mit

$$\underline{a}_0 = i \left(\frac{1}{2} z\right)^{-n} \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \cdot \left(\frac{1}{4} z^2\right)^k$$

$$\underline{a}_1 = 1 - \frac{2i}{\pi} \left(\gamma + \ln\left(\frac{z}{2}\right) \right)$$

Gleichung (D5) ist gut geeignet zur Berechnung der Hankel-Funktionen, wenn die Differenz zwischen dem Betrag des Arguments z und der Ordnung n kleiner als ungefähr 10 ist. Bei größeren Beträgen von z treten in der Summe in Gl. (D5) Differenzen großer Zahlen auf, die in numerischen Berechnungen bewirken können, daß alle signifikanten Stellen des Ergebnisses verloren gehen. Daher wird für Zahlen mit

$$(|z| - n) > 10 \tag{D6}$$

die Berechnung mit einer für große Beträge von z geeigneten Reihe durchgeführt. Für diesen Zahlenbereich wird die Beziehung nach /34/ verwendet:

$$\begin{aligned}
 \underline{H}_n(z) = & \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{-i \cdot \left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \\
 & \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n - \frac{1}{2}}{n} \cdot \Gamma\left(n + k + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{i}{2z}\right)^k
 \end{aligned} \tag{D7}$$

Die numerische Berechnung der Hankel-Funktionen erfolgt auf der UNIVAC 1108 mit doppelt genauen Zahlen, d.h. mit 16 Stellen Genauigkeit.

Anhang EProgrammierung

Das Programmsystem zur dynamischen Berechnung dreidimensionaler Finite-Element-Modelle ist aus den drei voneinander unabhängigen Programmen RAND3D, TRANSF, COMSAP aufgebaut. Im Programm RAND3D wird die Steifigkeitsmatrix des dreidimensionalen Randelements nach Abschnitt 5 ermittelt. Die Berechnung der Freifeldverschiebungen bei Erdbebenerregung (Abschnitt 7) erfolgt im Programm TRANSF. Im Programm COMSAP wird die Steifigkeitsmatrix des diskretisierten Innenbereichs aufgestellt, zu der Steifigkeitsmatrix des dreidimensionalen Randelements addiert und das Gleichungssystem mit dem Lastvektor, der bei Erdbebenerregung mit Hilfe des Programms TRANSF nach Abschnitt 7 ermittelt wird, gelöst. Als Ergebnis erhält man die Verschiebungen und Spannungen in komplexer Form.

Das Programm COMSAP entstand durch Erweiterung des Programms SAP IV nach /9/ zur Rechnung im komplexen Bereich. Nach der Einführung des komplexen Elastizitäts- und Schubmoduls nach Gl. (2.8), (2.12) wird zur daraus resultierenden komplexen Steifigkeitsmatrix die mit $-\Omega^2$ multiplizierte Massenmatrix und gegebenenfalls die mit RAND3D ermittelte Steifigkeitsmatrix des Randelements addiert. Der Lastvektor wird durch Eingabe von Einzelkräften oder bei Erdbebenerregung nach Abschnitt 7 ermittelt.

Neben der Umstellung von SAP IV zur Rechnung mit komplexen Zahlen wurden einige Unterprogramme neu eingeführt und überflüssige Programmteile entfernt.

Alle Programme sind in FORTRAN V erstellt. Die numerischen Berechnungen wurden auf der UNIVAC 1108 des Rechenzentrums der Universität Karlsruhe durchgeführt.

Zusammenstellung der Bezeichnungen und Symbole

Mathematische Zeichen:

i	$= \sqrt{-1}$
\dots	= Komplexe Zahl
$\text{Re}(\dots)$	= Realteil einer komplexen Zahl
$\text{Im}(\dots)$	= Imaginärteil einer komplexen Zahl
$ \dots $	= Betrag einer komplexen Zahl
$\varphi(\dots)$	= Phasenwinkel einer komplexen Zahl
δ_{mn}	= 1 für $m = n$ = 0 für $m \neq n$ (Kronecker-Symbol)
e^{\dots}	= Exponentialfunktion
$\Gamma(\dots)$	= Gamma-Funktion
$\underline{H}_n(\dots)$	= Hankel-Funktionen der zweiten Art von der Ordnung n
π	= 3.14159

Bezeichnungen

$\left[\underline{\tilde{A}} \right], \left[\underline{\tilde{A}}_s \right]$	Matrizen nach Anhang A
$\left[\underline{A} \right], \left[\underline{A}_s \right]$	Transformationsmatrizen (Gl. 5.68b)
$\left[\underline{A}_{\text{ant}} \right]$	Matrix $\left[\underline{A} \right]$ für zur x-Achse symmetrische Systeme mit zur x-Achse antimetrischem Verschiebungsfeld
$\left[\underline{A}_{\text{el}} \right]$	Transformationsmatrix bezogen auf ein Element, Gl. (5.66b), Anhang C
$\left[\underline{A}_1 \right]$	Matrix $\left[\underline{A} \right]$ für $n = 1$
$a_o, \bar{a}_o, \bar{a}_{oj}$	Bezogene Frequenzen, Gl. (8.4), (7.8), (7.10)
a_1, a_2	Beiwerte nach Gl. (5.58)
A_1, A_2	Beiwerte, Gl. (6.5a), (6.5b)
$\left[\underline{B} \right]$	Matrix nach Gl. (3.2a)
$\left[\underline{\tilde{B}} \right], \left[\underline{\tilde{B}}_s \right]$	Matrizen nach Anhang A
$\left[\underline{B}_k \right]$	Matrix nach Gl. (5.23) (siehe Anhang A)
b	Halbe Breite der belasteten Fläche, Bild 29
C_{ic}, C_{ie}, C_{if}	Beiwerte Gl. (6.1a)
$\left[\underline{D} \right]$	Stoffmatrix, Gl. (2.17)
$\left[\underline{\tilde{D}} \right], \left[\underline{\tilde{D}}_s \right]$	Matrizen, Anhang A
$\left[\underline{D}_w \right], \left[\underline{D}_u \right], \left[\underline{D}_v \right]$	Matrizen nach Gl. (7.17a) - (7.17c)
$\left[\underline{\tilde{E}} \right], \left[\underline{\tilde{E}}_s \right]$	Matrizen, Anhang A
$\{e_x\}, \{e_y\}, \{e_z\}$	Vektoren nach Gl. (7.15)
E	Elastizitätsmodul, Einbettungstiefe
\underline{E}	Komplexer Elastizitätsmodul, Gl. (2.8)
\underline{E}_s	Komplexe Steifezahl, Gl. (7.13)
$\left[\underline{F}_s \right], \left[\underline{F}_{si} \right]$	Übertragungsmatrizen der Freifeldschwingung, Gl. (7.5)
$\{ \underline{F}_v \}$	Vektor, Gl. (5.13)
$f(\varphi)$	Verlauf einer Verschiebung, Gl. (6.2)

$f_{1,\nu}(z)$ $f_{2,\nu}(z)$,	
$f_{3,\nu}(z)$	Elemente des Vektors $\{ \underline{F}_\nu \}$, Gl. (5.13)
$f_{i,j}$	Ansatzfunktionen der Verschiebungen, Gl. (5.54a,b) Tabellen 2, 3
$f_{1\nu}$, $f_{2\nu}$	Bezogene Nachgiebigkeitsfunktionen, Gl. (8.3)
\underline{f}_{uF}	Übertragungsfunktion, bezogen auf das Freifeld
\underline{f}_{ug}	Übertragungsfunktion, bezogen auf die starre Schicht
$\left[\underline{\tilde{G}} \right], \left[\underline{\tilde{G}}_s \right]$	Matrizen nach Anhang A
G	Schubmodul
\underline{G}	Komplexer Schubmodul, Gl. (2.12)
G'	Dämpfungsmaß, Gl. (8.7)
g_1 , g_2 , g_3	Ansatzfunktionen in $\left[N_\eta \right]$, Gl. (5.16) bzw. (5.17)
$\left[\underline{H}_\nu \right]$	Matrix, Gl. (5.12)
H	Schichthöhe, Bild 29
\underline{H}_o	Horizontalkraft, Gl. (8.14)
\underline{H}_s	Horizontalkraft, Gl. (8.12)
h , h_s	Schichthöhen, Bild 24
h_i	Ansatzfunktionen, Bild 4, Gl. (5.51), (5.52)
\underline{h}_o	Höhe des Steifigkeitsschwerpunkts, Gl. (8.13)
$\left[\underline{I}_3 \right]$	3 x 3 Einheitsmatrix
j	= 1 Randelement mit linearer Ansatzfunktionen = 2 Randelement mit quadratischer Ansatzfunktion
$\left[\underline{K}_e \right]$	Steifigkeitsmatrix eines Finiten Elements, Gl. (3.6)
$\left[\underline{K}_s \right]$	System-Steifigkeitsmatrix
$\left[\underline{K}_w \right]$	Matrix der Wellenzahlen, Gl. (5.43)
\underline{k}_ν	Wellenzahl
\underline{k}_{xx} , $\underline{k}_{x\varphi}$, $\underline{k}_{q\varphi}$	Komplexe Federwerte, bezogen auf die Fundamentsohle, Gl. (8.12)

$\underline{k}_{x_0}, \underline{k}_{\varphi_0}$	Komplexe Federwerte, bezogen auf den statischen Steifigkeitsschwerpunkt, Gl. (8.14)
$[\tilde{L}], [\tilde{L}_s]$	Matrizen, Anhang A
$\{\underline{L}_s\}, \{\underline{L}_{sj}\}$	Lastvektoren der Erdbebenerregung der Freifeldschwingung, Gl. (7.5)
$[\tilde{M}], [\tilde{M}_s]$	Matrizen nach Anhang A
$[M_e]$	Massenmatrix eines Finiten Elements, Gl. (3.7)
$[M_s]$	System-Massenmatrix
\underline{M}_0	Moment, Gl. (8.14)
M_s	Moment, Gl. (8.12)
m	Anzahl der symmetrischen Teilsysteme
m_i	Punktmasse des Freiheitsgrades i
$[N]$	Matrix der Ansatzfunktionen, Gl. (3.1), (5.51), (5.52)
$[\tilde{N}], [\tilde{N}_s]$	Matrizen, Anhang A
$[N_\eta]$	Matrix der Ansatzfunktionen in η -Richtung, Gl. (5.16), (5.17)
$[N_\xi]$	Matrix der Ansatzfunktionen in ξ -Richtung, Gl. (5.54a,b)
$\{n\}$	Einheitsvektor in Richtung der Normalen auf der Fläche A
n	Ordnung des Fourierterms (z.B. Gl. (5.1))
$n_{\text{sym}}, n_{\text{ant}}$	Ordnung der bei symmetrischen Systemen mit symmetrischem bzw. antimetrischem Verschiebungsfeld zu berücksichtigenden Fouriergliedern
n_e	Anzahl von dreidimensionalen Elementen entlang des Randes in einer Schicht, Bild 16
n_p	Anzahl der Knotenpunkte, siehe Bild 16 und 17
n_s	Anzahl der Schichten des Randelements
n_ν	Anzahl der betrachteten Bodenwellen, Gl. (5.31)

- $\{\underline{P}_a\}$ Vektor der in den Knotenpunkten angreifenden äußeren Kräften, bezogen auf ein Element, Gl. (3.5)
- $\{\underline{P}_e\}$ Vektor der durch äußere Oberflächenkräfte hervorgerufenen Knotenpunktskräfte eines Finiten Elements, Gl. (3.8)
- $\{\underline{P}_{es}\}$ Vektor der durch die äußeren Oberflächenkräfte hervorgerufenen Knotenpunktskräfte für alle Elemente des Systems, Gl. (3.10)
- $\{\underline{P}_o\}$ Vektor der Knotenpunktskräfte am zylinderförmigen Rand des in Finite Elemente diskretisierten Bereichs, Gl. (5.80)
- $\{\underline{P}_{o,F}\}$ Erdbebenkräfte am zylinderförmigen Rand des diskretisierten Bereichs, Gl. (7.17)
- $\{\bar{\underline{P}}_o\}, \{\bar{\underline{P}}'\}$ Oberflächenkräfte am Rand, Bild 8
- $\{\bar{\underline{P}}_{o,sym}\},$
 $\{\bar{\underline{P}}_{o,ant}\}$ Vektoren der Fourier-transformierten Knotenpunktskräfte am Rand, Gl. (4.1a,b)
- $\{\bar{\underline{P}}_{o,sym;o}\},$ Fouriertransformierte Randkräfte nach Gl. (7.16) für
 $\{\bar{\underline{P}}_{o,sym;1}\},$ das 0-te und 1-te Fourierglied
 $\{\bar{\underline{P}}_{o,ant;1}\}$
- $\{\underline{P}_R\}$ Vektor der bei Erdbebenerregung des Systems vom Randelement auf den in Finite Elemente diskretisierten Bereich übertragenen Kräfte
- $\{\underline{P}_{as}\}$ Vektor der äußeren Kräfte an allen Freiheitsgraden des Systems, Gl. (3.10)
- $\{\underline{P}_s\}$ Vektor der Knotenpunktskräfte am zylinderförmigen Rand des in Finite Elemente diskretisierten Bereichs, bezogen auf eine Schicht
- $\{\bar{\underline{P}}_{s,sym}\},$ Vektoren der Fourier-transformierten Kräfte am Rand,
 $\{\bar{\underline{P}}_{s,ant}\}$ bezogen auf eine Schicht, Gl. (5.76a,b)

$\{p\}$	Vektor mit Flächenkräfte in kartesischen Koordinaten
$\{p^*\}$	Vektor der bezogenen Kräfte, Gl. (6.71)
$\{\bar{p}_{\text{sym},n}\}$,	Vektoren der Fourier-transformierten Flächenlasten
$\{\bar{p}_{\text{ant},n}\}$	nach Gl. (5.5)
$\{p_z\}$	Vektor der Flächenkräfte am Rand in Zylinderkoordinaten
$p(t), \underline{p}$	Harmonische Gleichlast, Gl. (8.1), Bild 29
p_x, p_y, p_z	Oberflächenkräfte in kartesischen Koordinaten
p_r, p_z, p_φ	Oberflächenkräfte in Zylinderkoordinaten
$p_{r,\text{sym},n}, p_{z,\text{sym},n}, p_{\varphi,\text{sym},n}$	
$p_{r,\text{ant},n}, p_{z,\text{ant},n}, p_{\varphi,\text{ant},n}$	Elemente der Vektoren $\{p_{\text{sym},n}\}, \{p_{\text{ant},n}\}$, Gl. (5.5)
p_x^*, p_y^*, p_z^*	Bezogene Kräfte, Gl. (5.71)
$\begin{bmatrix} \tilde{Q} \\ \tilde{Q}_s \end{bmatrix}$	Matrizen, Anhang A
$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$	Steifigkeitsmatrix des Randelements für den zylinderförmigen Rand des mit dreidimensionalen isoparametrischen Elementen diskretisierten Bereichs, Gl. (5.83)
$\begin{bmatrix} \bar{R} \end{bmatrix}$	Steifigkeitsmatrix des Randelements für die Fourier-transformierten Kräfte und Verschiebungen, Gl. (5.42)
$\begin{bmatrix} R_{\text{sym}} \\ R_{\text{ant}} \end{bmatrix}$	Matrix $\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$ für zur x-Achse symmetrische Systeme mit zur x-Achse symmetrischem bzw. antimetrischem Verschiebungsfeld, Gl. (6.8), (6.9)
r	Koordinate im zylindrischen Koordinatensystem
r_o	Radius des Randelements
$\begin{bmatrix} S \\ S_s \end{bmatrix}$	Transformationsmatrizen, Gl. (5.68a), Bilder 18, 19
$\begin{bmatrix} S_{\text{el}} \end{bmatrix}$	Transformationsmatrix bezogen auf ein Element, Gl. (5.66a), Anhang C

$[S_{\text{sym}}]$	Matrix $[S]$ für zur x-Achse symmetrische Systeme mit zur x-Achse symmetrischem Verschiebungsfeld
$[S_0], [S_1]$	Matrix $[S]$ für $n = 0$ bzw. $n = 1$
S_1, S_2	Beiwerte, Gl. (6.3a), (6.3b)
t	Zeit
$[T]$	Matrix zur Koordinatentransformation der Verschiebungen und Flächenkräfte, Gl. (5.48)
$[T_{\text{sym}}], [T_{\text{ant}}]$	Matrizen, Gl. (5.65a, b)
T_0	Periode einer Schwingung
$\{\underline{u}\}$	Vektor der Verschiebungen in kartesischen Koordinaten
$\{\hat{\underline{u}}\}$	Vektor der virtuellen Verschiebungen
$\{\hat{\underline{u}}_{\text{sym}}\}$	Vektor der Fourier-transformierten virtuellen Verschiebungen
$\{\underline{u}_e\}$	Vektor der Knotenpunktverschiebungen eines Finiten Elements
$\{\underline{u}_{e0}\}$	Vektor der Knotenpunktverschiebungen eines Finiten Elements für die Knotenpunkte in der Berührungsfläche mit dem Randelement, Gl. (5.50a, b)
$\{\underline{u}_F\}$	Vektor der horizontalen Freifeldverschiebungen in x-Richtung, Gl. (7.17)
$\{\underline{u}_0\}$	Vektor der Verschiebungen aller Punkte am zylinderförmigen Rand des in Finite Elemente diskretisierten Bereichs, Gl. (5.69c)
$\{\bar{\underline{u}}_{\text{rel}, F, \text{sym}, 0}\}$	Vektor der symmetrischen Fourierterme null-ter Ordnung der Freifeldverschiebung
$\{\bar{\underline{u}}_{\text{rel}, F, \text{sym}, 1}\}$	Vektor der symmetrischen Fourierterme erster Ordnung der Freifeldverschiebung
$\{\bar{\underline{u}}_{\text{rel}, F, \text{ant}, 1}\}$	Vektor der antimetrischen Fourierterme erster Ordnung der Freifeldverschiebung

$\{\underline{u}_s\}$	Vektor der Verschiebungsgrößen in allen Freiheitsgraden des Systems
$\{\bar{u}_{s, \text{sym}}\}$,	Vektoren der Knotenpunktverschiebungen $\{\bar{u}_{\text{sym}, n}\}$
$\{\bar{u}_{s, \text{ant}}\}$	bzw. $\{\bar{u}_{\text{ant}, n}\}$ bezogen auf eine Schicht, Gl. (5.22)
$\{\bar{u}_{o, \text{sym}}\}$,	Vektor der Fourier-transformierten Verschiebungen des
$\{\bar{u}_{o, \text{ant}}\}$	Randelements für alle Freiheitsgrade, Gl. (5.33)
$\{\bar{u}_{\text{sym}, n, i}\}$,	Vektoren der Fourier-transformierten Knotenpunktverschiebung des
$\{\bar{u}_{\text{sym}, n, i}\}$	Randelements, Gl. (5.19)
$\{\bar{u}_{\text{sym}, n}\}$,	Vektoren der Fourier-transformierten Verschiebungen,
$\{\bar{u}_{\text{ant}, n}\}$	Gl. (5.1)
$\{\underline{u}_z\}$	Vektor der Verschiebungen in Zylinderkoordinaten
$\{\underline{u}_{\text{rel}}\}$	Vektor der relativen Knotenpunktverschiebungen, Gl. (7.15)
\underline{u}	Verschiebungskomponente in x-Richtung
\underline{u}_F	Absolute Bodenverschiebung im Freifeld, Gl. (7.2)
\underline{u}_{FF}	Verschiebung der freien Oberfläche im Freifeld, Gl. (8.10)
\underline{u}_g	Bodenverschiebung, Bild 24
\underline{u}_i	Knotenpunktverschiebungen des Punktes i
$\underline{u}_{\text{rel}}$	Relativverschiebung, Gl. (7.14a)
$\underline{u}_{\text{rel}, F}$	
$\underline{u}_{\text{rel}, F, o}$	Relative Bodenverschiebungen im Freifeld, Gl. (7.4)
$\bar{u}_{\text{sym}, n, i}$	
$\bar{u}_{\text{ant}, n, i}$	Elemente der Vektoren $\bar{u}_{\text{sym}, o, s}$, $\bar{u}_{\text{ant}, o, s}$
\underline{u}_o	Verschiebung des Steifigkeitsschwerpunkts des Fundaments, Gl. (8.12)
\underline{u}_s	Verschiebung der Fundamentsohle

$\{ \underline{v}_F \}$	Vektor der horizontalen Freifeldverschiebungen in y-Richtung
\underline{v}	Verschiebungskomponente in y-Richtung
\underline{v}_g	Bodenverschiebung, Gl. (7.14b)
\underline{v}_i	Knotenpunktverschiebung des Knotens i
v_{rel}	Relativverschiebung, Gl. (7.14b)
\underline{V}_L	Komplexe Längswellengeschwindigkeit
V_S	Scherwellengeschwindigkeit
\underline{V}_S	Komplexe Scherwellengeschwindigkeit
\underline{v}_z	Verschiebungskomponente in Zylinderkoordinaten
$\left[\underline{W} \right], \left[\underline{W}_{i\nu} \right]$	Matrizen nach Gl. (5.35), (5.36)
$\{ \underline{W}_{sym} \}$	Vektor nach Gl. (5.9)
$\{ \underline{w}_F \}$	Vektor der vertikalen Freifeldverschiebungen
\underline{w}	Verschiebungskomponente in z-Richtung
$w_0(t) \underline{w}_0$	Verschiebung im Mittelpunkt der belasteten Fläche, Gl. (8.2)
\underline{w}_i	Knotenpunktverschiebung des Punkts i
\underline{w}_g	Bodenverschiebung, Gl. (7.14c)
\underline{w}_{rel}	Relativverschiebung, Gl. (7.14c)
\underline{w}_z	Verschiebungskomponente in Zylinderkoordinaten
$\{ \underline{X}_\nu \}$	Vektor, Gl. (5.30)
$\{ \underline{X}_{1,i,\nu} \},$	Knotenpunktwerte der Funktionen $\underline{f}_1(z), \underline{f}_2(z), \underline{f}_3(z)$, Gl. (5.15)
$\{ \underline{X}_{2,i,\nu} \},$	
$\{ \underline{X}_{3,i,\nu} \}$	
$\{ \underline{X}_{s,\nu} \}, \{ \underline{X}_{i,\nu} \}$	Vektoren nach Gl. (5.15)
$X(t), \hat{X}(t)$	Zeitabhängige Größe, Gl. (2.1) - (2.4a)
$\underline{X}(\Omega_j)$	Fourierglied, Gl. (2.1) - (2.4a)
x	Kartesische Koordinate
x_i	x-Koordinate des Knotenpunkts i

y	Kartesische Koordinate, Bild 1
y_i	y -Koordinate des Knotenpunkts i
$\{Z_F\}, \{Z_{F,o}\}$	Zustandsvektoren für die Freifeldbewegung, Gl. (7.5)
$\{Z_{F,s}\}, \{Z_{F,n_s}\}$	- (7.7)
z	Koordinate, Bilder 1, 3
z_i	z -Koordinate des Knotenpunkts i
$\underline{\alpha}_{\nu, \text{sym}}$	
$\underline{\alpha}_{\nu, \text{ant}}$	Beteiligungsfaktoren, Gl. (5.11)
$\{\underline{\Gamma}_{\text{sym}}\}, \{\underline{\Gamma}_{\text{ant}}\}$	Vektoren der Beteiligungsfaktoren $\underline{\alpha}_{\nu, \text{sym}}$ bzw. $\underline{\alpha}_{\nu, \text{ant}}$, Gl. (5.34)
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Elemente des Vektors der Verzerrungen
$\underline{\gamma}_{rz}, \underline{\gamma}_{r\varphi}, \underline{\gamma}_{\varphi z}$	Elemente des Vektors der Verzerrungen in Zylinderkoordinaten
$\underline{\gamma}_{rz, \text{sym}}, \underline{\gamma}_{r\varphi, \text{sym}}, \underline{\gamma}_{\varphi z, \text{sym}}, \underline{\gamma}_{rz, \text{ant}}, \underline{\gamma}_{r\varphi, \text{ant}}, \underline{\gamma}_{\varphi z, \text{ant}}$	Fourierterme der Schiebungen in Zylinderkoordinaten
Δ	Gl. (5.10a)
$\{\underline{\varepsilon}\}$	Vektor der Verzerrungen in kartesischen Koordinaten, Gl. (2.6)
$\{\underline{\varepsilon}_Z\}$	Vektor der Verzerrungen in Zylinderkoordinaten, Gl. (2.23)
$\{\hat{\underline{\varepsilon}}\}$	Vektor der Dehnungen, die einem virtuellen Verschiebungsfeld entsprechen, Gl. (2.19)
$\{\bar{\underline{\varepsilon}}_{\text{sym}, n}\},$	Vektor der Fourierterme der Dehnungen, Gl. (5.2)
$\{\bar{\underline{\varepsilon}}_{\text{ant}, n}\}$	
$\underline{\varepsilon}$	Längsdehnung
ε_0	Amplitude einer Dehnung
ε_t	Momentenwert der Dehnung zur Zeit t
$\underline{\varepsilon}_x, \underline{\varepsilon}_y, \underline{\varepsilon}_z$	Elemente des Vektors der Verzerrungen in kartesischen Koordinaten

$\underline{\varepsilon}_{rr}, \underline{\varepsilon}_{\varphi\varphi}, \underline{\varepsilon}_{zz}$	Elemente des Vektors der Verzerrungen in Zylinderkoordinaten
$\underline{\varepsilon}_{rr, \text{sym}}, \underline{\varepsilon}_{\varphi\varphi, \text{sym}}, \underline{\varepsilon}_{zz, \text{sym}}, \underline{\varepsilon}_{rr, \text{ant}}, \underline{\varepsilon}_{\varphi\varphi, \text{ant}}, \underline{\varepsilon}_{zz, \text{ant}}$	Fourierterme der Dehnungen in Zylinderkoordinaten
ζ	Elementkoordinate, Bilder 4, 14
η	Elementkoordinate, Bilder 4, 14
$\bar{\eta}$	Beiwert, Gl. (8.8)
$\begin{bmatrix} \theta_{\text{sym}} \end{bmatrix}$,	Matrizen, Gl. (5.64a,b)
$\begin{bmatrix} \theta_{\text{ant}} \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} \vartheta \end{bmatrix}$	Differentialoperator, Gl. (2.6)
$\begin{bmatrix} \vartheta_{z1} \end{bmatrix}$	Differentialoperator, Gl. (2.23)
$\begin{bmatrix} \vartheta_{z2} \end{bmatrix}$	Differentialoperator, Gl. (2.25)
α	Beiwert, Gl. (7.5a)
λ	Lamé-Konstante
ν	Komplexe Querdehnzahl
ξ	Elementkoordinate, Bilder 4, 14
ξ_E	Hysteretisches Dämpfungsmaß einer Normalkraftdehnung
ξ_G	Hysteretisches Dämpfungsmaß einer Scherdehnung
ρ	Dichte
$\begin{bmatrix} \underline{\sigma} \end{bmatrix}$	Spannungstensor in kartesischen Koordinaten, Gl. (2.21)
$\begin{bmatrix} \underline{\sigma}_z \end{bmatrix}$	Spannungstensor in Zylinderkoordinaten, Gl. (2.27a)
$\{ \underline{\sigma} \}$	Vektor der Spannungen in kartesischen Koordinaten, Gl. (2.17)
$\{ \underline{\sigma}_z \}$	Vektor der Spannungen in Zylinderkoordinaten, Gl. (2.24)
$\{ \bar{\underline{\sigma}}_{n, \text{sym}} \}$	Fourierterme der Projektion der Oberflächenkräfte auf einen senkrecht zur Fläche stehenden Einheitsvektor, Gl. (5.25)

$\{\bar{\sigma}_{\text{sym},n}\}$,	Vektor der Fourierterme der Spannungen, Gl. (5.3)
$\{\bar{\sigma}_{\text{ant},n}\}$	
$\underline{\sigma}$	Normalspannung
σ_0	Amplitude einer Spannung
σ_t	Momentenwert der Spannung zur Zeit t
$\underline{\sigma}_x, \underline{\sigma}_y, \underline{\sigma}_z$	Spannungen in kartesischen Koordinaten
$\underline{\tau}_{xy}, \underline{\tau}_{yz}, \underline{\tau}_{zx}$	Spannungen in kartesischen Koordinaten
$\underline{\tau}, \underline{\tau}_0$	Schubspannungen infolge einer vertikal polarisierten Scherwelle im Freifeld, Gl. (7.4)
$[\underline{\Phi}], [\underline{\Phi}_{i\nu}]$	Matrizen nach Gl. (5.45), (5.47)
$[\underline{\Phi}_{\text{sym},n}], [\underline{\Phi}_{\text{ant},n}], [\underline{\Phi}_{\varepsilon,\text{sym},n}], [\underline{\Phi}_{\varepsilon,\text{ant},n}]$	Matrizen, Gl. (5.1), (5.2)
φ	Koordinate des zylindrischen Koordinatensystems
φ_i	Winkelkoordinate am i-ten Element einer Schicht, Bilder 13, 15
$\bar{\varphi}_i$	Winkelkoordinate des i-ten Abschnitts bei symmetrischen Systemen, Gl. (6.1a)
φ_0, φ_s	Drehwinkel des Fundaments, Gl. (8.12), (8.14)
$\tilde{\varphi}_L$	Phasenwinkel zwischen Spannung und Dehnung, Gl. (2.9)
$[\underline{\Psi}], [\underline{\Psi}_{i\nu}]$	Matrizen, Gl. (5.44), (5.46)
Ω, Ω_j	Kreisfrequenzen
ω_j	Eigenfrequenzen der elastischen Schicht bei reiner Scherbeanspruchung
$\bar{\omega}_r, \bar{\omega}_\varphi, \bar{\omega}_z$	Gl. (5.10c-d)

