

Modellierung stabartiger Bauteile bei Flächentragwerken

Horst Werkle und Fabian Gerold, Fachhochschule Konstanz

ZUSAMMENFASSUNG

Als Modelle zum Anschluss biegebeanspruchter Stabelemente an Scheiben- und Plattenelemente werden die kinematisch starre Kopplung, die Kopplung über eine Transformation der Spannungen des Stabes (EST) sowie die genauere Modellierung mit Flächen- bzw. Volumenelementen untersucht. Insbesondere werden die Lagerung von Wandscheiben und Deckenplatten auf Stützen betrachtet. Es zeigt sich, dass die Anschlussmomente von Stäben von der starren kinematischen Kopplung tendenziell überschätzt werden, während das EST-Modell bei in der Praxis üblichen Elementgrößen eher mit der genaueren FE-Lösung des Anschlusses nach der Elastizitätstheorie übereinstimmt. Die Anwendung der Kopplungsbedingungen an dem Gesamtmodell eines Gebäudes macht deutlich, dass bei solchen 3D-Modellen Interaktionseffekte mit dem Baugrund die Bemessungsschnittgrößen in den Decken gegenüber der üblichen zweidimensionalen Berechnung spürbar beeinflussen können.

1 EINFÜHRUNG

Ein Meilenstein in der Entwicklung der technischen Mechanik als Ingenieurwissenschaft war die Formulierung der Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte durch den Baseler Mathematiker und Naturwissenschaftler Jakob Bernoulli. Erst diese Annahme eröffnete Henri Navier den Weg zur Entwicklung der Balkentheorie, die die Grundlage für eine Vielzahl technischer Anwendungen bildet. Anstelle der Spannungen erhält man beim Balken Spannungsresultierende, die Schnittgrößen. Die Verschiebungen werden zu Verschiebungsgrößen wie punktuellen Verschiebungen und Drehwinkel zusammengefasst. In der Tragwerksplanung ist die Bemessungspraxis überwiegend auf Stabtragwerke abgestimmt. Die Berechnung von ebenen Scheibentragwerken unter Verzicht auf die Bernoulli'sche Annahme wurde in der Ingenieurpraxis erst in den letzten Jahrzehnten mit Hilfe computerorientierter Verfahren wie der Finite-Element-Methode möglich.

Der Balkentheorie und der Theorie der Scheiben liegen unterschiedliche Vorstellungen von Kräften und Spannungen zugrunde. Das in der Stabstatik so erfolgreiche Konzept der Einzelkräfte und Momente sowie der Knotenverschiebungen und –drehwinkel führt zu Schwierigkeiten, wenn man es auf Flächentragwerke überträgt. Bekannt ist die Entstehung von Spannungs- und Verschiebungssingularitäten unter Punktlasten bei Scheiben. Besondere Probleme treten auch bei

der Finite-Element-Modellierung auf, wenn Stabelemente an Flächenelemente angeschlossen werden sollen. Der Beitrag behandelt die Kopplung von Stabelementen an Scheiben- und Plattenelemente und zeigt hierzu geeignete Konzepte auf. Einen Überblick geben auch [1], [2] und [3].

2 SCHEIBEN

2.1 Modelle für Elementübergänge

Zur Formulierung des Übergangs zwischen Stab- und Scheibenelementen wurden bisher folgende Möglichkeiten vorgeschlagen:

- Kopplung über kinematische Starrkörperbedingungen
 - Transformationsmethode
 - Lagrange-Parameter-Verfahren
 - Straffunktionsverfahren
- Heuristische Ingenieurmodelle
- Äquivalente Spannungstransformation (EST)

Bei der Kopplung mit Starrkörperbedingungen nimmt man an, dass der Anschluss des Stabelements eben bleibt. Für die in Bild 1(a) dargestellte Verbindung eines Balkenelements mit Scheibenelementen gilt dann für die Verschiebungen der Knoten 1, 2 und 3 in x-Richtung:

$$u_1 = u_2 + \varphi_2 \cdot d / 2, \quad u_3 = u_2 - \varphi_2 \cdot d / 2, \quad v_1 = v_2, \quad v_3 = v_2.$$

Die Freiheitsgrade der „Sklaven-Knoten“ 1 und 3 werden von den Verschiebungen und der Verdrehung des „Meister-Knotens“ 2 vorgegeben. Diese Methode wird auch als Transformationsmethode bezeichnet. Andere Verfahren, um Starrkörperbedingungen zu formulieren sind das Lagrange-Parameter-Verfahren und das Straffunktionsverfahren. Die Formulierung kinematischer Starrkörperbedingungen ist bekanntlich in CADINP mit dem KINE-Datensatz leicht möglich. Beispielsweise gilt für die angegebene Bedingung nach Bild 1a mit einer Stützenbreite von #d:

```
KINE 11  21 1  26 #d/2
KINE 12  22 1
KINE 31  21 1  26 -#d/2
KINE 32  22 1
```

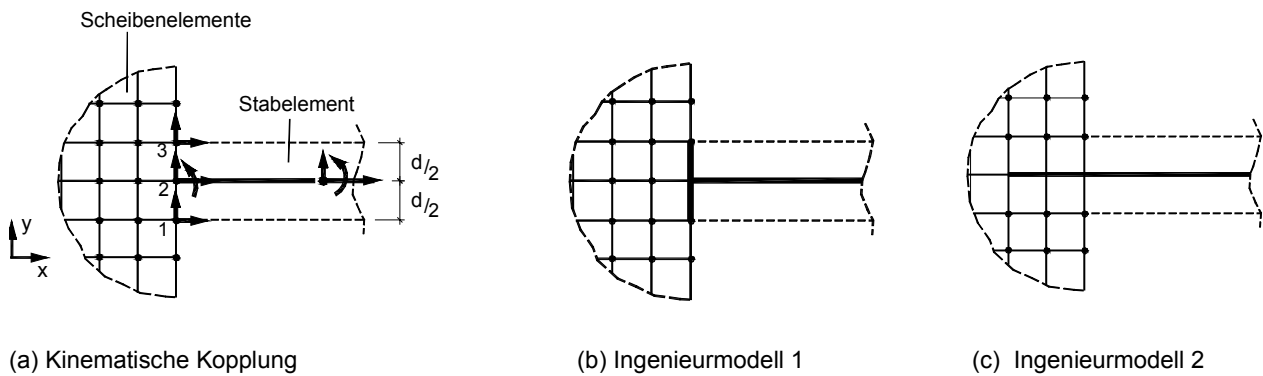


Bild 1: Modelle für die Kopplung von Balken- und Scheibenelementen

Vielfach werden auch einfache Ingenieurmodelle vorgeschlagen. So sollen beispielsweise die Stabelemente in das Finite-Element-Netz der Scheibe weitergeführt werden, um die Übertragung von Biegemomenten zu ermöglichen (Bilder 1b, 1c). Über die Genauigkeit dieser heuristischen Modelle sind keine Untersuchungen bekannt.

Eine neuere Vorgehensweise ist die Äquivalente Spannungstransformation (EST). Hierbei geht man davon aus, dass nicht die Verschiebungen an der Verbindung von Balken- und Scheibenelementen linear verlaufen, sondern, dass die vom Balken auf die Scheibenelemente übertragenen Spannungen einen linearen Verlauf besitzen. Hierbei handelt es sich also um eine im Vergleich zur kinematischen Kopplung weichen Anschluss, der Spannungssingularitäten vermeidet, wie sie bei starren Einschlüssen in elastische Tragwerke auftreten können.

Die Formulierung der Übergangsbedingungen nach der EST erfolgt in drei Schritten:

Schritt 1: Ermittlung der Spannungen des Balkens an den Knoten des FE-Modells der Scheibe

$$\underline{p}_T = \underline{X} \cdot \underline{F}_S \quad (1)$$

\underline{p}_T : Spannungswerte an den Knoten des FE-Modells, \underline{F}_S : Balkenschnittgrößen

Schritt 2: Bestimmung der äquivalenten Knotenkräfte der Scheibe infolge der Spannungen nach Schritt 1 mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen:

$$\underline{F}_T = \underline{A} \cdot \underline{p}_T \quad (2)$$

Schritt 3: Transformation der Steifigkeitsmatrix \underline{K}_S des Balkenelements auf die Freiheitsgrade des FE-Modells der Scheibe:

Transformation der Kraftgrößen: $\underline{F}_T = \underline{T}^T \cdot \underline{F}_S \quad (3a)$

Transformation der Verschiebungsgrößen: $\underline{u}_S = \underline{T} \cdot \underline{u}_T \quad (3b)$

Transformation der Steifigkeitsmatrix des Balkens: $\underline{K}_T = \underline{T}^T \cdot \underline{K}_S \cdot \underline{T} \quad (3c)$

mit $\underline{T}^T = \underline{A} \cdot \underline{X} \quad (3d)$

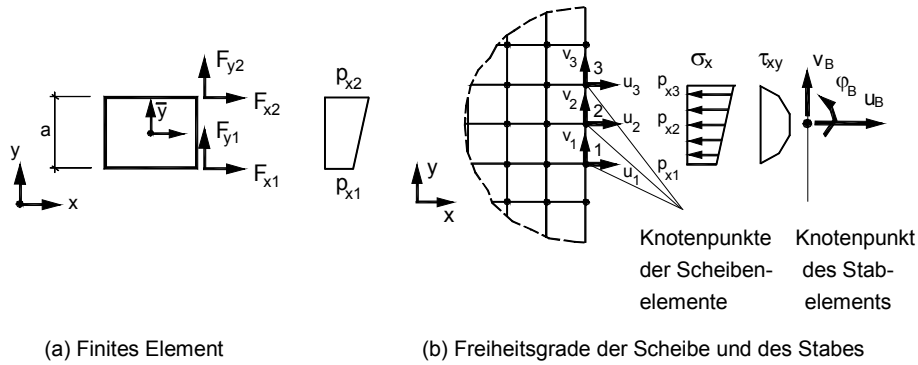


Bild 2: Äquivalente Spannungstransformation

Beim Anschluss eines Balkens an zwei Elemente eines FE-Scheibenmodells (entsprechend der Balkenbreite) erhält man nach der EST folgende Beziehungen:

$$\underline{u}_S = \underline{u}_a = \begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \varphi_B \end{bmatrix} \quad \underline{F}_S = \underline{F}_a = \begin{bmatrix} F_{x,B} \\ F_{y,B} \\ M_{z,B} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Die Steifigkeitsmatrix des Balkens mit den Knoten a und b sei:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{aa} & \underline{K}_{ab} \\ \underline{K}_{ba} & \underline{K}_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_a \\ \underline{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_a \\ \underline{F}_b \end{bmatrix} \quad (5)$$

Wenn zwei Finite Elemente mit linearer Ansatzfunktion der Verschiebungen an den Balken angeschlossen werden, erhält man die Transformationsbeziehung zu:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 3/4 & 0 & 1/8 \\ 1/d & 0 & 0 & 0 & -1/d & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{u}_T = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \underline{u}_S = \underline{T} \cdot \underline{u}_T \quad (6)$$

Gleichung (6) verdeutlicht, dass die Transformationsbeziehung die Knotenverschiebungsgrößen des Balkens als gewichtetes Mittel der FE-Knotenverschiebungen darstellt.

Die Transformation des Knotens a ergibt die auf die Freiheitsgrade des FE-Modells bezogene Steifigkeitsmatrix des Balkens zu:

$$\begin{bmatrix} \underline{T}^T \cdot \underline{K}_{aa} \cdot \underline{T} & \underline{T}^T \cdot \underline{K}_{ab} \\ \underline{K}_{ba} \cdot \underline{T} & \underline{K}_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}_T \\ \underline{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_T \\ \underline{F}_b \end{bmatrix} \quad (7)$$

Knoten b kann, falls erforderlich, ebenfalls transformiert werden.

Das EST-Modell vernachlässigt die lokale Erhöhung der Steifigkeit der Scheibe durch den Balken. Um diesen Effekt zu berücksichtigen, kann man zwischen die Knoten 1-2-3 einen Balken mit der

Höhe $d/2$ einfügen. Das EST-Modell mit örtlich erhöhter Steifigkeit wird als ESTS-Modell bezeichnet.

Auch das EST-Modell lässt sich mit CADINP leicht beschreiben. Haben beispielsweise die FE-Knoten die Nummern 1, 2 und 3 und der Balkenknoten die Nummer 100, so lauten die Datensätze für eine Koppelung nach Bild 2 bei einer Stützenbreite von $\#d$:

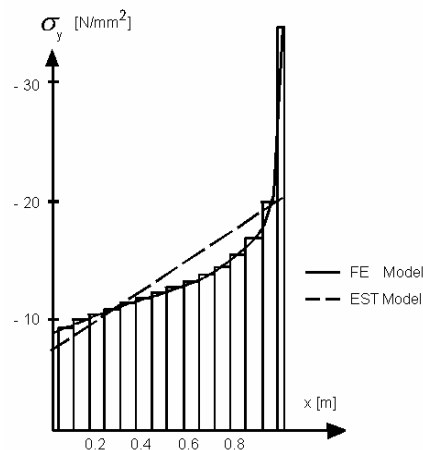
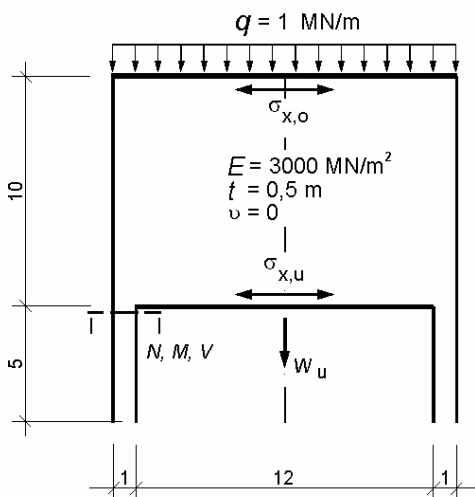
```

KINE 1001  11 0.250  21 0.500  31 0.250
KINE 1002  12 0.125  22 0.750  32 0.125
KINE 1006  11 1/#d   31 -1/#d
    
```

2.2 Stützen bei Scheiben

Die Modellierung von Stützen bei Scheibentragwerken wird häufig diskutiert. Vorgeschlagen werden meist ingenieurmäßige Modelle oder die kinematische Kopplung. Am Beispiel der Wandscheibe nach Bild 3 sollen folgende Stützenmodellierungen verglichen werden:

- Finite-Element-Modellierung der Stütze (FEM)
- Balken mit Starrkörperverschiebungs-Bedingung (MPC = Multipoint Constraint)
- Balken mit äquivalenter Spannungstransformation (EST)
- Balken mit äquivalenter Spannungstransformation und zusätzlicher Steifigkeit (ESTS)



Normalspannungen in Schnitt I-I, $n=15$ [1]

Bild 3: Wandscheibe

Die Berechnung erfolgte mit isoparametrischen Scheibenelementen. Bild 4 zeigt das FE-Modell und das EST-Modell für eine Elementgröße von 0.5 [m] oder 2 Elemente pro [m] bzw. $n=2$. Die Spannungen und Verschiebungen beider Modelle stimmen gut miteinander überein, Tabelle 1.

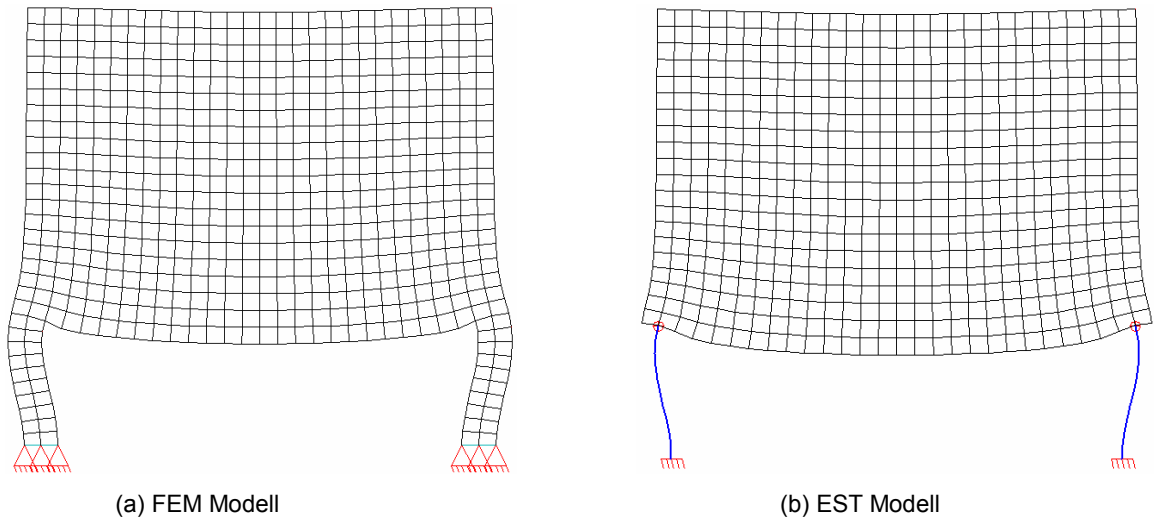


Bild 4: Verformte Finite Element Modelle (n=2)

Tabelle 1: Spannungen und Verschiebungen - FEM und EST

Spannungen & Verschiebungen		n			
		1	2	4	8
FEM/ EST	$\sigma_{x,o}$ [N/mm ²]	-1.80 / -1.83	-1.91 / -1.92	-1.94 / -1.95	-1.95/-1.96
	$\sigma_{x,u}$ [N/mm ²]	3.51 / 3.59	3.60 / 3.63	3.64 / 3.65	3.65 / 3.66
	w_u [mm]	3.90 / 3.93	3.99 / 4.00	4.02 / 4.03	4.03 / 4.04

Die Konvergenz des Biegemoments der Stütze in Schnitt I-I ist in Bild 5 dargestellt. Es zeigt sich, dass das Modell der kinematischen Starrkörperkopplung sich zu steif verhält, während das EST-Modell zu weich ist. Das verbesserte ESTS-Modell, das auch die lokale Erhöhung der Steifigkeit im Bereich der Stütze abbildet, konvergiert gegen die exakte Lösung. Bei den in der Praxis verwendeten Elementgrößen von n=2 bis n=4 führt allerdings das EST-Modell zu der besten Übereinstimmung mit dem Grenzwert der FEM-Lösung. Die Überschätzung der lokalen Steifigkeit durch die Ansatzfunktionen der isoparametrischen Finiten Elemente wird durch die leichte Unterschätzung der lokalen Steifigkeit beim EST-Modell kompensiert.

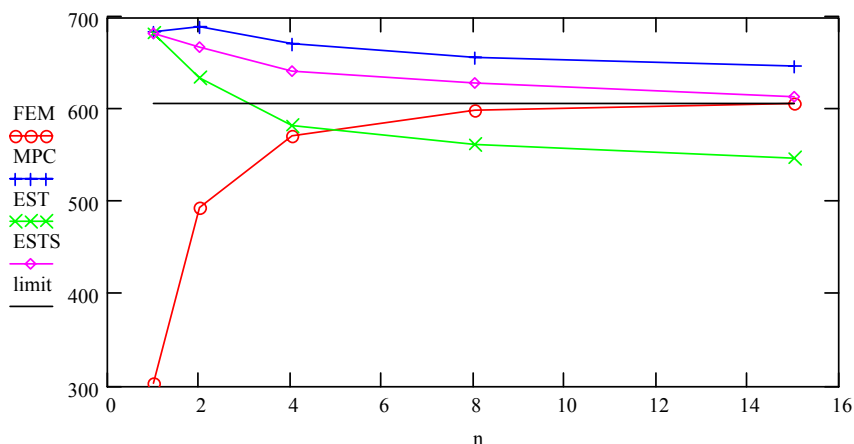


Bild 5: Konvergenz des Biegemoments der Stütze in Schnitt I-I [kNm]

Es sei noch angemerkt, dass die beiden Ingenieurmodelle mit $n=2$ Stützmomenten von 560 kNm (Ingenieurmodell 1, Bild 1b) bzw. 370 kNm (Ingenieurmodell 2, Bild 1c) ergeben. Dabei wurde die Steifigkeit der zusätzlich eingeführten Stabelemente gleich der Stützensteifigkeit gewählt. Die Ergebnisse hängen hier natürlich auch von den künstlich festgelegten Stabsteifigkeiten des Anschlusses ab. Am ehesten scheint das Ingenieurmodell 1 mit entsprechend hoch angesetzten Stabsteifigkeiten die Verhältnisse wiederzugeben, während das Ingenieurmodell 2 unzutreffende Ergebnisse liefert.

2.3 Balkenartige Bauteile bei Scheiben

Durch die Anwendung der Transformationsbedingungen auf beide Stabendknoten können Stäbe mit der kinematischen Starrkörperbedingung oder der EST-Bedingung an Scheibenelemente angeschlossen werden.

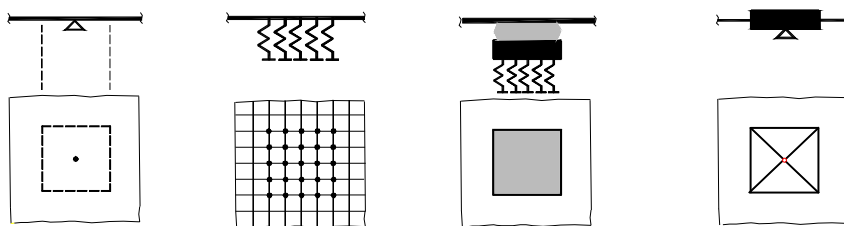
3 PLATTEN

3.1 Stützen von Flachdecken

Obwohl die Berechnung von Flachdecken ein klassisches Einsatzgebiet der Finite-Element-Methode ist, kommt es bei der Modellierung von Stützen immer wieder zu Fragen. Derzeit gibt es folgende Modelle zur Modellierung von Stützen:

- Punktlager
- Modell mit kinematischer Kopplung (Starrer Stützenkopf)
- Flüssigkeitskissenmodell
- Elastische Bettung
- Koppelfedermodell (EST: Äquivalente Spannungstransformation)

Darüber hinaus kann der Stützenbereich auch mit dreidimensionalen Volumenmodellen abgebildet werden.



(a) Punktlager (b) Elastische Bettung (c) Flüssigkeitskissen (d) Starrer Stützenkopf

Bild 6: Modelle zur Modellierung von Stützen bei Flachdecken

Das Punktlager hat eine Singularität der Schnittgrößen sowie bei schubweichen Platten auch der Verschiebungen zur Folge und sollte daher nicht verwendet werden.

Beim Modell mit kinematischer Kopplung geht man von einem starren Stützenkopf aus. Die Starrkörperbedingung kann mit CADINP leicht beschrieben werden. Das Modell ergibt gute Ergebnisse im Feld. Über der Stütze werden keine Schnittgrößen ausgegeben. Weiterhin kann der Einschluss eines Starrkörpers in ein elastisches Tragwerk zu Singularitäten in den Eckpunkten und Störungen der Schnittgrößenverläufe führen. Die Bedeutung dieses Einflusses hängt allerdings vom Elementtyp ab.

Beim Modell der elastischen Bettung ist die Wahl des Bettungsmoduls problematisch. Wählt man den Bettungsmodul aufgrund der Längssteifigkeit $k_z = E \cdot A_s / h$ der Stütze, erhält man $k_{s_z} = E/h$, wobei A_s die Querschnittsfläche der Stütze, E der Elastizitätsmodul und h die Stützhöhe bedeuten. Diese Steifigkeit gibt jedoch die Biegesteifigkeit der Stütze nicht korrekt wieder. Diese beträgt $k_{\phi_y} = \alpha \cdot E \cdot I_y / h$. Dabei bedeuten I_y das Trägheitsmoment der Stütze und α ist ein Beiwert, der die Lagerungsbedingung der Stütze am entgegengesetzten Ende beschreibt. Bei einer gelenkigen Lagerung ist $\alpha = 3$, bei einer Einspannung $\alpha = 4$. Im Fall von zwei Stützen im Stockwerk über und unter der betrachteten Decke addieren sich die Wert, so dass beispielsweise bei zwei gleichen eingespannten Stützen in beiden Stockwerken sich $\alpha = 8$ ergibt. Der Bettungsmodul beträgt $k_{s_z} = \alpha \cdot E/h_s$. Die Längssteifigkeit und die Drehsteifigkeit können allerdings nicht gleichzeitig durch eine elastische Bettung beschrieben werden.

Beim Koppelfeder- oder EST-Modell handelt es sich um eine „gekoppelte elastische Bettung“, bei der sowohl die Längssteifigkeit wie auch die Biegesteifigkeit der Stütze konsistent wiedergegeben werden [4]. Analog zu den Scheibentragwerken geht man zur Herleitung von den linear verteilten Längsspannungen und den parabelförmig verteilten Schubspannungen der Stütze aus und bringt diese quasi als „Flächenlasten“ auf die Plattenelemente der Decke auf. Damit vermeidet man starre Einschlüsse in elastische Körper und erhält die gewohnte Momentenausrundung über der Stütze.

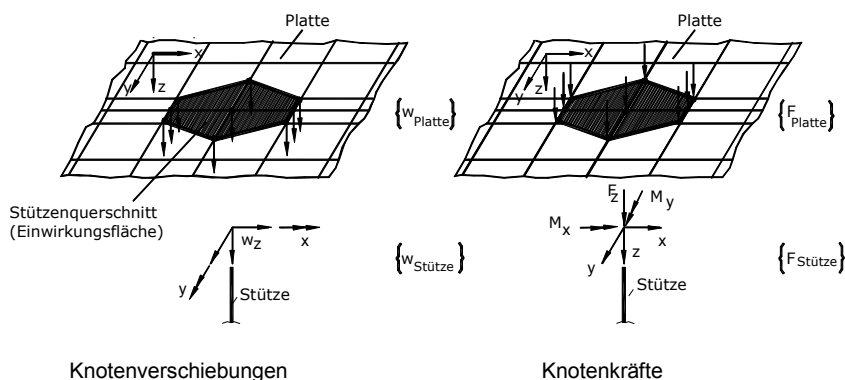


Bild 7: Koppelfedermodell (EST)

Als Beispiel wird eine Rechteckstütze untersucht, Bild 8. Die Starrkörperkopplung wird mit CADINP beschrieben durch

KINE 13	53	1	54	#dy/2	55	#dx/2	;	KINE 14	54	1	;	KINE 15	55	1
KINE 23	53	1	54	#dy/2	55	0	;	KINE 24	54	1	;	KINE 25	55	1
KINE 33	53	1	54	#dy/2	55	-#dx/2	;	KINE 34	54	1	;	KINE 35	55	1
KINE 43	53	1	54	0	55	#dx/2	;	KINE 44	54	1	;	KINE 45	55	1
KINE 63	53	1	54	0	55	-#dx/2	;	KINE 64	54	1	;	KINE 65	55	1
KINE 73	53	1	54	-#dy/2	55	#dx/2	;	KINE 74	54	1	;	KINE 75	55	1
KINE 83	53	1	54	-#dy/2	55	0	;	KINE 84	54	1	;	KINE 85	55	1
KINE 93	53	1	54	-#dy/2	55	-#dx/2	;	KINE 94	54	1	;	KINE 95	55	1

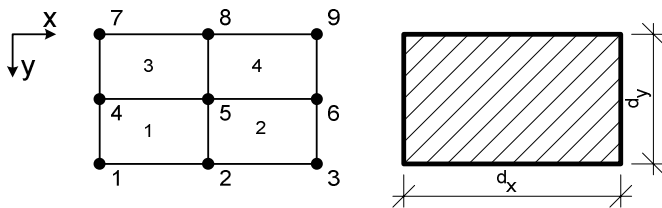


Bild 8: FE-Modell der Platte über einer Rechteckstütze

Für das Koppelfedermodell erhält man die Matrix zur Transformation der Stabschnittgrößen auf die Knotenkräfte der Platte bzw. der Plattenknotenverschiebungen zu den Verschiebungsgrößen des Stabes zu [4]:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4 \cdot d_x} & 0 & \frac{-1}{4 \cdot d_x} & \frac{1}{2 \cdot d_x} & 0 & \frac{-1}{2 \cdot d_x} & \frac{1}{4 \cdot d_x} & 0 & \frac{-1}{4 \cdot d_x} \\ \frac{1}{4 \cdot d_y} & \frac{1}{2 \cdot d_y} & \frac{1}{4 \cdot d_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{4 \cdot d_y} & \frac{-1}{2 \cdot d_y} & \frac{-1}{4 \cdot d_y} \end{bmatrix} \quad (8)$$

mit

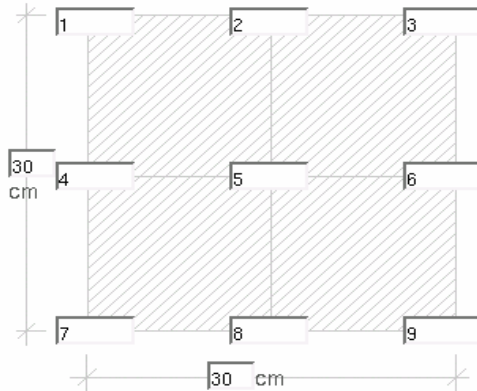
$$\underline{w}_T = w_{Platte} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6 \quad w_7 \quad w_8 \quad w_9], \quad \underline{w}_S = w_{Stütze} = \begin{bmatrix} w_z \\ \phi_{yy} \\ \phi_{xx} \end{bmatrix} \quad (9)$$

In CADINP erhält man, wenn der Balkenknoten, bzw. der Knotenpunkt, an dem die Dreh- und Verschiebungsfedern für die Stütze wirken, die Nummer 100 hat:

KINE 1003 13 1/16. 23 1/8. 33 1/16. 43 1/8. 53 1/4. 63 1/8. 73 1/16. 83 1/8. 93 1/16.
 KINE 1005 13 1/(4*#dx) 33 -1/(4*#dx) 43 1/(2*#dx) 63 -1/(2*#dx) 73 1/(4*#dx) 93 -1/(4*#dx)
 KINE 1004 13 1/(4*#dy) 23 1/(2*#dy) 33 1/(4*#dy) 73 -1/(4*#dx) 83 -1/(2*#dy) 93 -1/(4*#dy)

Die KINE-Bedingungen für die Rechteckstütze können mit einem in Internet verfügbaren Tool leicht erstellt werden, Bild 9 [6]: <http://www.dictionary.bi.fh-konstanz.de/Werkle/kopplungstool/>

Geben Sie hier die Nummern der anzuschließenden Knoten ein:



Geben Sie hier die Nummer des Knotens ein, an den obige Knoten angeschlossen werden sollen (an diesen Knoten kann anschließend ein Stab oder ein Auflager oder Federn angeschlossen werden):

100

Dieser Knoten wird zusätzlich erzeugt und liegt in der Mitte des obigen Systems.

- Koppelfeder
- Kinematische Starrkörperkopplung

Berechnen

Bild 9: Berechnungsmodul im Internet zum Aufstellen der KINE-Bedingungen

3.2 Beispiel: Regelmäßige Flachdecke

Eine Flachdecke mit 3x3 Feldern wird durch eine konstante Flächenlast p belastet, ihre Dicke beträgt $d_{pl} = \ell/30$, die Poisson-Zahl ist $\mu = 0.2$. Die quadratischen Stützen haben die Abmessungen $a = b = \ell/20$, ihre Höhe beträgt $h_s = \ell/2$ und sie sind am unteren Ende gelenkig gelagert, Bild 10.

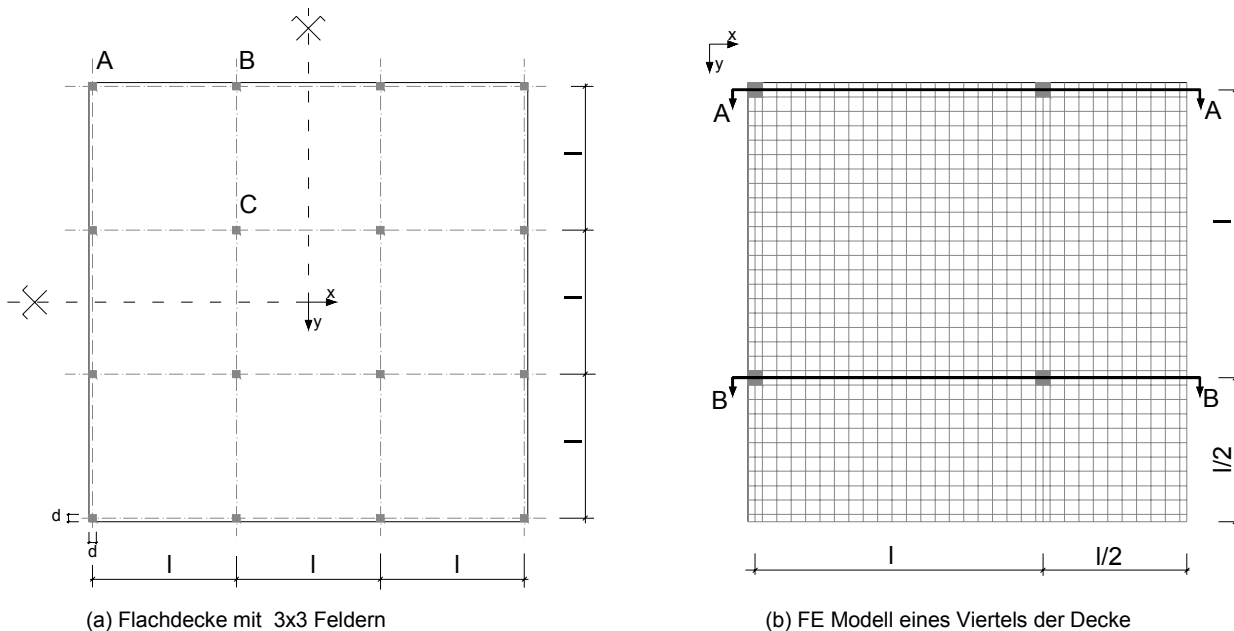


Bild 10: Flachdecke

Ein Vergleich des Koppelfedermodells mit dem Modell einer elastischen Bettung mit einem Bettungsmodul von $k_{s_z} = E/h_s$ und von $k_{s_z} = 3 \cdot E/h_s$, entsprechend der Längs- und Biegesteifigkeit der Stütze ist in Bild 11 dargestellt. Es wird deutlich, dass das Modell mit dem Bettungsmodul $k_{s_z} = 3 \cdot E/h_s$, das die Drehsteifigkeit wiedergibt, insbesondere bei der Randstütze die beste Übereinstimmung mit dem genaueren Koppelfedermodell ergibt. Beim Modell der elastischen Bettung sollte also der Bettungsmodul aufgrund der Drehsteifigkeit der Stütze und nicht aufgrund der Längssteifigkeit, wie dies heute üblich ist, bestimmt werden. Die Stützenmomente sind dann bei der Stützenbemessung zu berücksichtigen [5].

Die Beanspruchungen am Stützenkopf lassen sich mit Volumenmodellen realitätsnäher als mit Platten-Stab-Modellen ermitteln. Zum Vergleich wurde daher das in Bild 12 dargestellte Volumenmodell untersucht. Die mit dem Koppelfedermodell ermittelten Stützenschnittgrößen sowie die Längsspannungen an der Plattenoberseite stimmen mit dem Volumenmodell gut überein, Bild 13. Allerdings sind die Spannungen in der Platte am Stützenkopf niedriger als nach dem Koppelfedermodell und dem Modell der elastischen Bettung. Ob dieser Effekt, der aufgrund der Versteifung der Platte durch den Stützenkopf auftritt, bei der Bemessung berücksichtigt werden sollte, ist fraglich, da die heutigen Bemessungsmodelle auf dem Modell Platte-Stab beruhen.

Tabelle 3: Schnittgrößen am Anschnitt Stütze-Platte

Modell	Stütze	$F_z / (p \cdot \ell^2)$	$M_x / (p \cdot \ell^3)$	$M_y / (p \cdot \ell^3)$
Koppelfedermodell	A	0.219	0.0134	-0.0134
	B	0.474	0.0218	0.0027
	C	1.157	-0.0040	-0.0040
Volumenmodell	A	0.221	0.0136	-0.0136
	B	0.474	0.0212	0.0028
	C	1.159	-0.0040	-0.0040
Starre Kopplung	A	0.219	0.0141	-0.0141
	B	0.473	0.0218	0.0028
	C	1.159	-0.0041	-0.0041

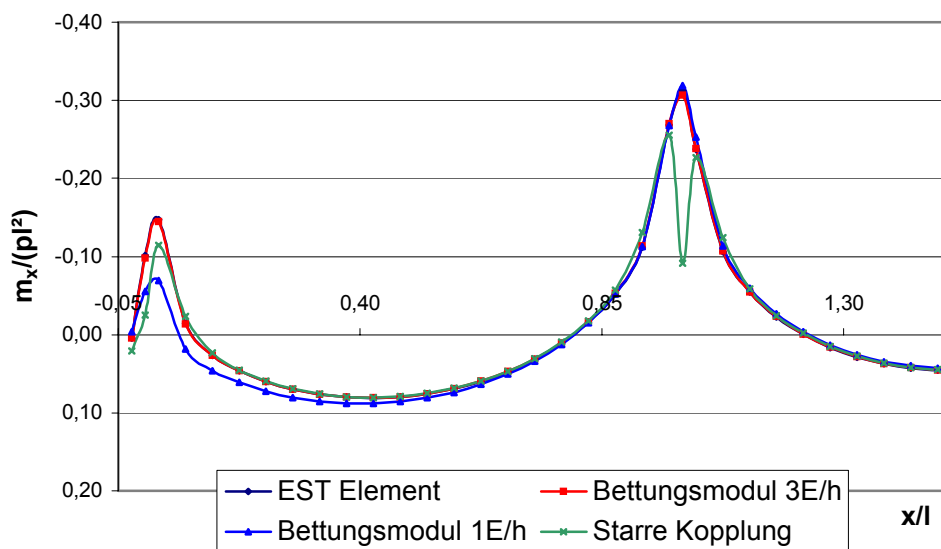


Bild 11: Biegemoment m_x , Schnitt B-B

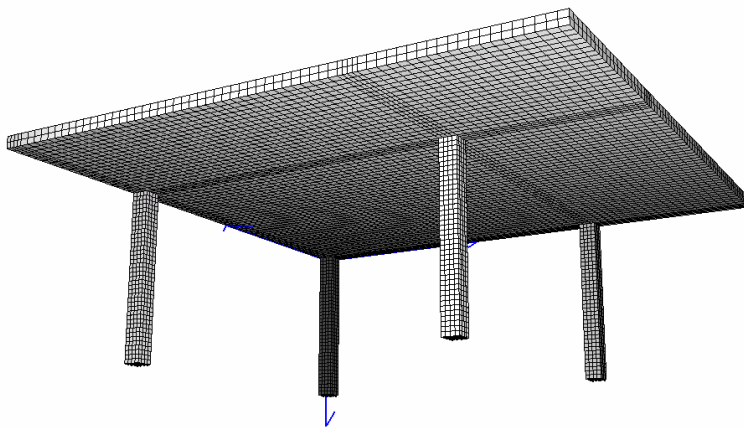


Bild 12: Volumenmodell der Flachdecke

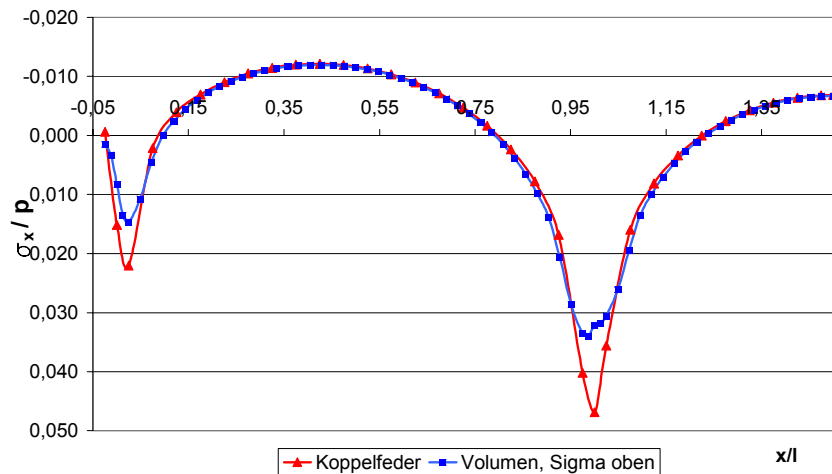


Bild 13: Spannungen σ_x im Schnitt B-B [MN/m²]

3.3 Stäbe bei Plattentragwerken

Die Verbindung von Stabelementen mit Plattenelementen kann auf die gleiche Weise wie die Stützenkopplung erfolgen. Hierzu sind die Terme für die Übertragung der Querkräfte sowie des Torsionsmomentes zu ergänzen.

4 GEBÄUDEMODELLE

4.1 Statische Modellbildung

Konventionell werden Gebäude aus Stahlbeton durch Zerlegung in Einzelpositionen und Übertragung der Lasten zwischen den Positionen statisch berechnet. Aufgrund der zugenommenen Leistungsfähigkeit von Hard- und FE- Software ist es heute möglich, Gebäude als Gesamtmodelle zu untersuchen. Dadurch werden in allen Lastfällen alle vorhandenen Tragelemente berücksichtigt.

Das in Bild 14 dargestellte Gebäude wird sowohl als dreidimensionales Finite-Element-Modell als auch auf konventionelle Weise d.h. durch Zerlegung in einzelne Positionen im Lastfall Volllast untersucht. Es besitzt einen kastenförmigen Keller. Die Stützen sind in allen Geschossen durchgehend. Die Stützen wurden sowohl als Volumenelemente wie auch als Stabelemente mit EST-Kopplung sowie mit kinematisch starrer Kopplung abgebildet. Die Deckenplatte wurde in beiden Fällen mit Plattenelementen modelliert (Bild 15).

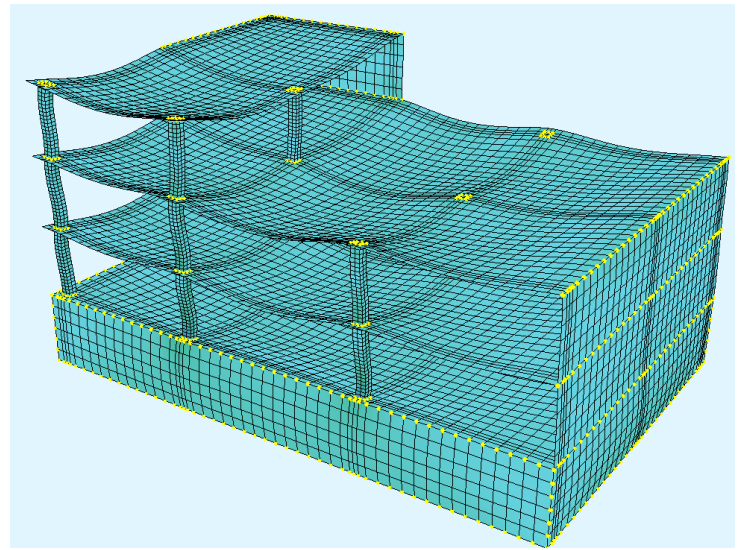
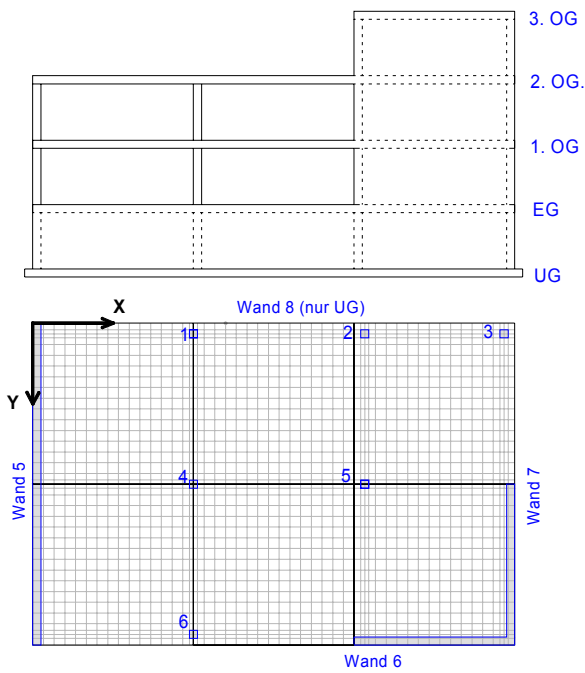


Bild 14: Grundriss und Schnitt des Gebäudemodells

Das Modell wurde mit der Eingabesprache CADINP eingegeben, die variablen Eigenschaften (Baugrundmodellierung, Bettungswerte, Stützenmodellierung und -kopplung) wurden dabei parametrisiert, um nicht für jede Kombination ein eigenes Modell eingeben, prüfen, und vorhalten zu müssen.

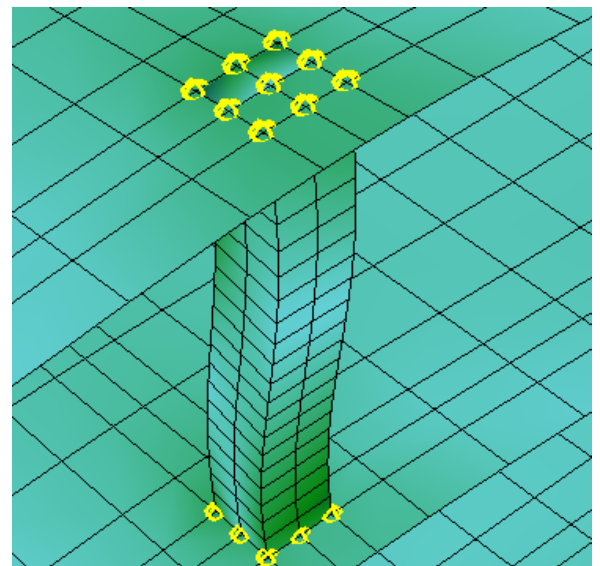
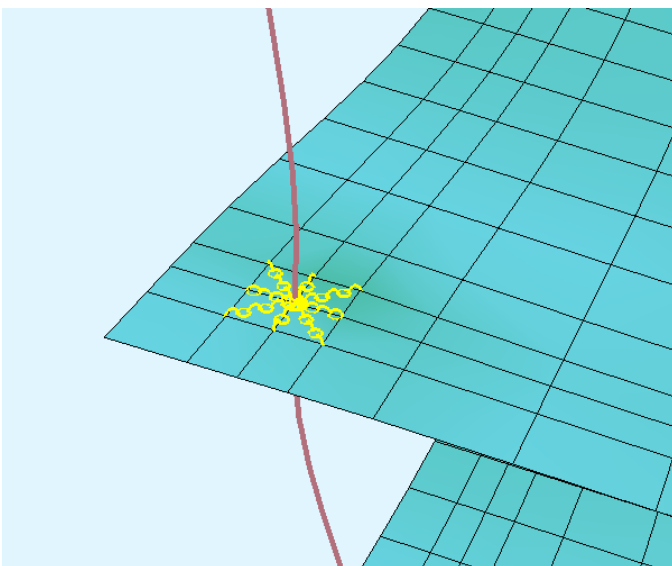


Bild 15: Verformungsbild bei der Stützenmodellierung mit Stabelementen und mit Volumenelementen

4.2 Einfluss der Modellierung und der Nachgiebigkeit des Bodens

Um den Einfluss der Modellierung und der Nachgiebigkeit des Bodens auf die Schnittgrößen der Bodenplatte und der Decken zu untersuchen, werden der Steife- bzw. der Bettungsmodul variiert. Der Bettungsmodul wurde so ermittelt, dass die Setzungen im Mittel gleich denjenigen des Steifemodulmodells sind. Bild 16 zeigt die Setzungen, die sich nach dem Bettungsmodul- und dem Steifemodulverfahren ergeben. Bei steifen Böden sind die Verschiebungen der Bodenplatte unter der hohen Einzellast der Stütze in Plattenmitte größer als an dem durch die Kellerwände ausgesteiften Rand. Bei weichen Böden entzieht sich der Boden unter der Stütze der Lastaufnahme und die Stützenlasten werden vermehrt über die Decken auf die steifen Kellerwände abgetragen. Die unterschiedlichen Setzungen von Innenstützen und äußeren Kellerwänden wirken sich auch auf die Stützenkräfte und auf die Biegemomente in den Deckenplatten aus. Sind die Stützenseitzungen größer als die der Außenwände (steifer Baugrund) so bedeutet dies, dass die Stützenkräfte gegenüber der positionsweisen 2D-Modellierung abnehmen. Entsprechend werden auch die Stützenmomente in den Deckenplatten betragsmäßig geringer, Bild 17. Setzen sich hingegen im Fall des weichen Baugrundes die Außenwände mehr als die Stützen, so nehmen die Stützenkräfte und die Stützenmomente der Decken betragsmäßig zu. Der Einfluss des Baugrundes wirkt sich also auch auf die Stützenmomente in den Geschossdecken aus. Er ist in den unteren Geschossen am größten und nimmt in den oberen Geschossen ab.

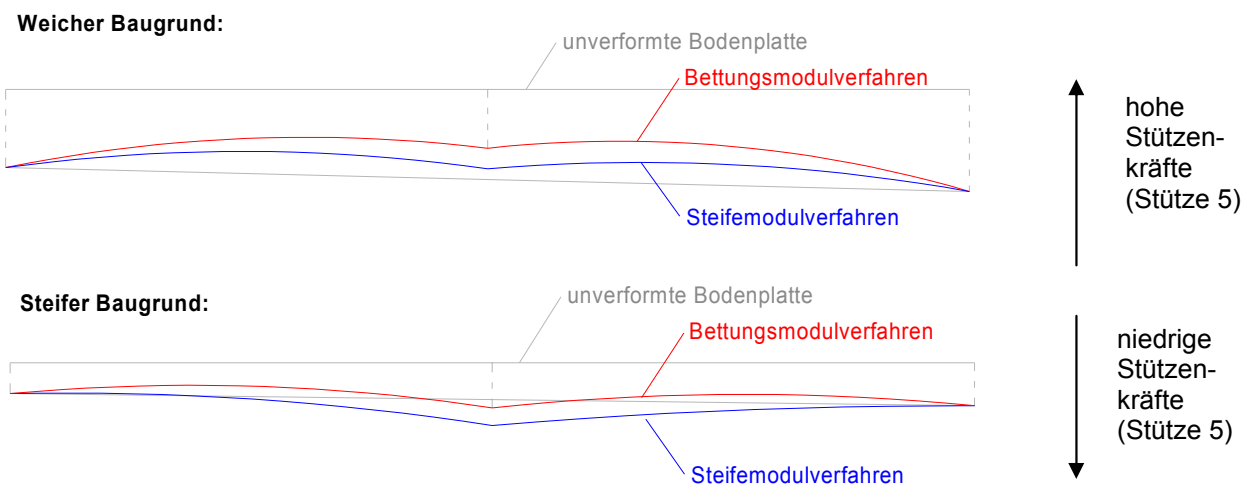


Bild 16: Verformungen der Bodenplatte in einem Schnitt in Querrichtung (qualitativ, relativ zum Rand)

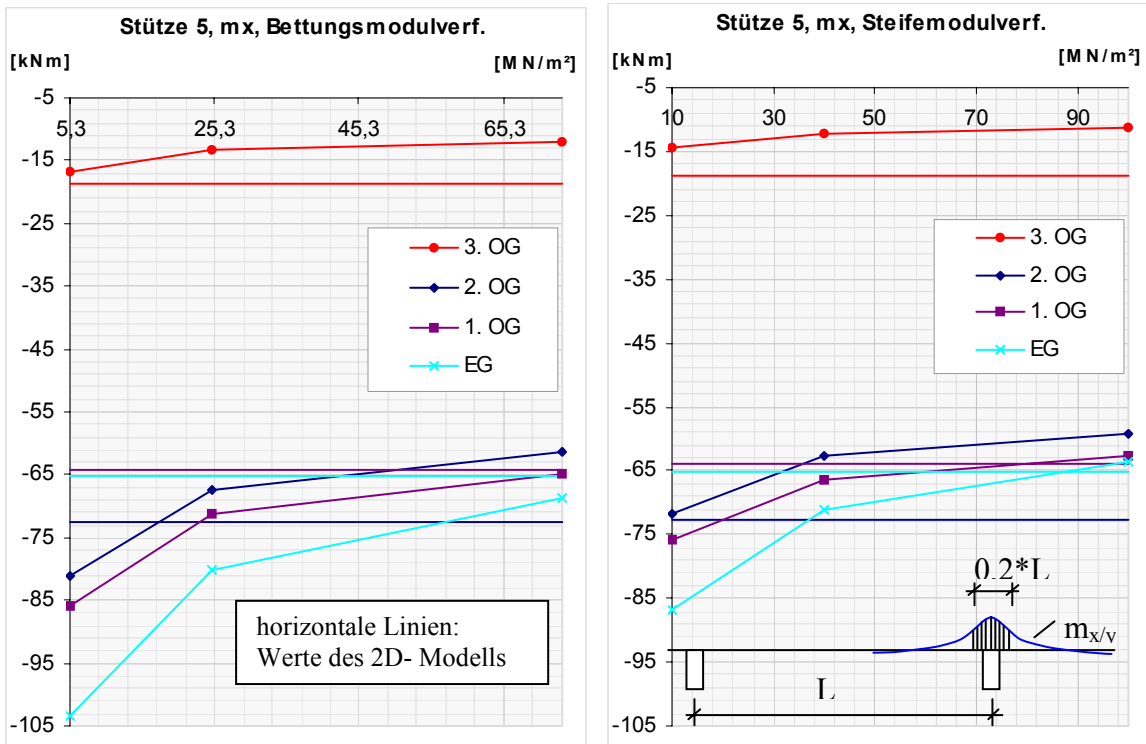
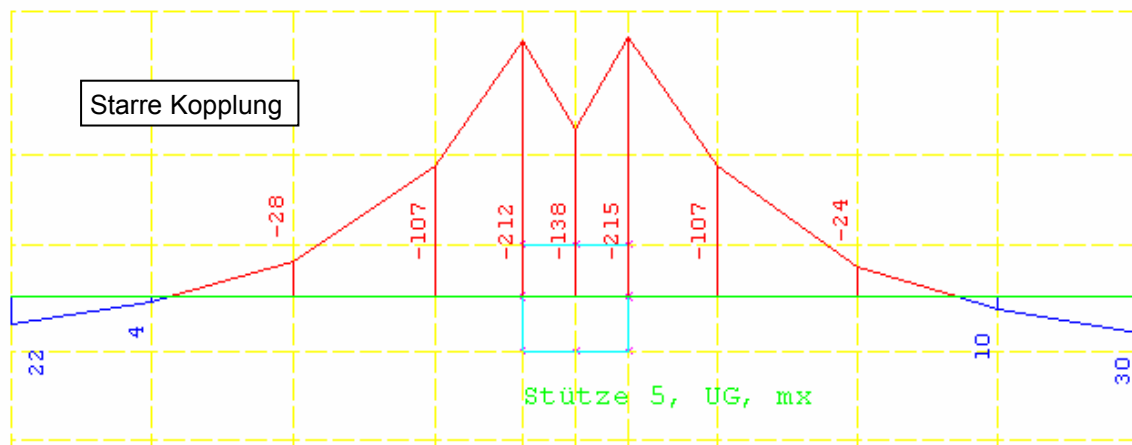


Bild 17: Momente m_x in der Deckenplatte bei Stütze 5

4.3 Einfluss der Modellierung der Stützen auf die Deckenschnittgrößen

Die Plattenmomente der Stütze 5 sind in Bild 18 dargestellt. Die Modellierung der Stützen mit Volumenelementen führt zu spürbar geringeren Stützenmomenten als die elastische Lagerung der Platte mit dem Koppelfedermodell. Dagegen werden die Feldmomente sowie die Schnittgrößen der Stützen kaum von der Art der Modellierung beeinflusst.



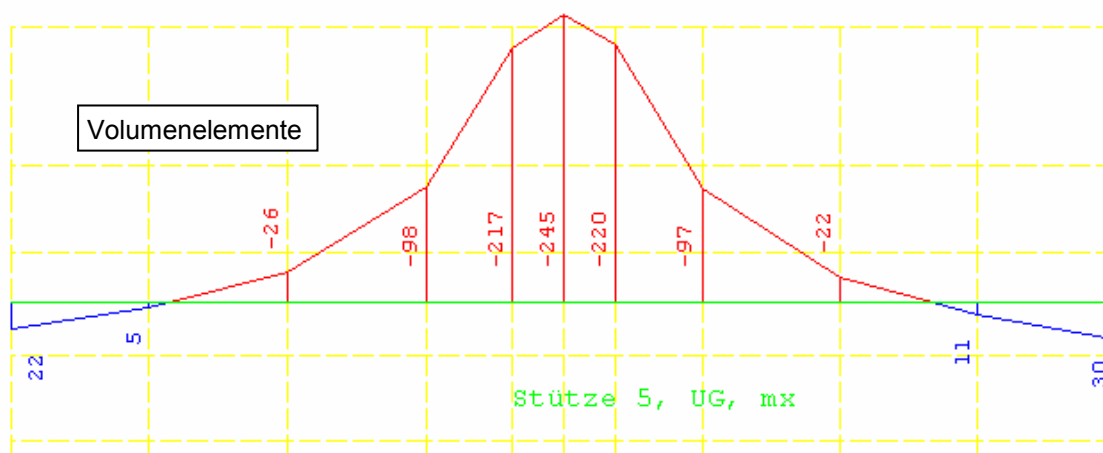
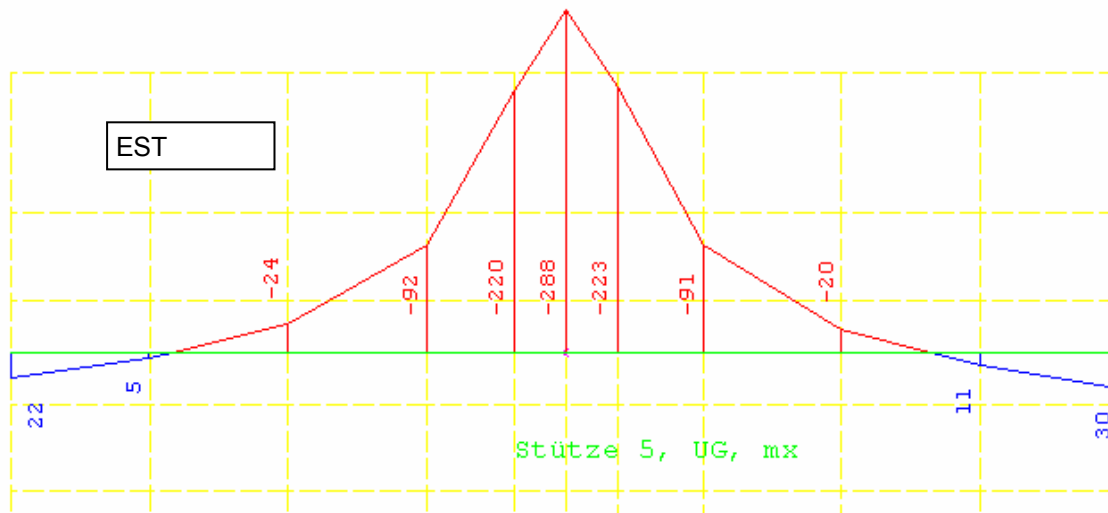


Bild 18: Plattenmomente m_x in x-Richtung bei Stütze 5 (Mittelstütze)

4.4 Bewertung des Gesamtmodells

Die Realität wird im Gesamtmodell deutlich besser abgebildet als bei der Berechnung in Einzelpositionen. Dies gilt auch, wenn man berücksichtigt, dass der Einfluss des Bauverfahrens hier nicht berücksichtigt wurde [7]. Die Unterschiede betragen teilweise 10-15% und liegen auf der sicheren oder auch auf der unsicheren Seite. Sie hängen maßgeblich vom Baugrund, der Geometrie des Gebäudes sowie auch von der Art der Modellierung ab.

Bei dem untersuchten, vergleichsweise einfachen Bauwerk erscheint der Modellierungsaufwand für das Gesamtmodell geringer als für die Summe aller Einzelpositionen. Insbesondere sind keine Lastübertragung zwischen den Positionen und keine zusätzliche Definition der Lagerungs- und Einspannbedingungen erforderlich, die durch das Auseinanderschneiden des Systems entstehen. Dies erspart Aufwand und überdies wird eine nicht zu unterschätzende Fehlerquelle ausgeschaltet. Nachteilig ist hingegen, dass das System unübersichtlicher wird und die Ergebnisse nicht mehr so leicht abgeschätzt werden können.

5 EMPFEHLUNGEN

Der Anschluss von Stabelementen an Flächenelemente mit einer kinematischen starren Kopplung überschätzt die Steifigkeit des Anschlusses. Sinnvoller erscheint eine auf einer Transformation der Biegebalkenspannungen beruhende Anschlussbedingung, die ebenfalls durch KINE-Datensätze eingegeben werden kann. Nicht verwendet werden sollte beim Anschluss von Stäben an Scheibenelemente das Ingenieurmodell 2 (Bild 1).

Wenn Stützen von Flachdecken durch eine elastische Bettung der Platte im Stützenbereich abgebildet werden, sollte der Bettungsmodul aufgrund der Biegesteifigkeit und nicht aufgrund der Längssteifigkeit der Stützen gewählt werden. Die sich in den Stützen ergebenden Anschlussmomente werden dann insbesondere bei Rand- und Eckstützen in der Bemessung berücksichtigt.

Bei Geschossbauten kann die Interaktion mit dem Baugrund auch die Stützen- und Deckenschnittgrößen spürbar beeinflussen. Gegebenenfalls sollte eine Berechnung des Gebäudes als 3D-Gesamtmodell in Betracht gezogen werden.

LITERATUR

- [1] Werkle H., Finite Elemente in der Baustatik, zweite Auflage, Vieweg, Wiesbaden, 2001
- [2] Hartmann F., C. Katz, Statik mit finiten Elementen, Springer, Berlin, 2002
- [3] Kemmler R., E. Ramm, Modellierung mit der Methode der Finiten Elemente, *Betonkalender 2001*, Ernst & Sohn, Berlin, 2001
- [4] Werkle H., Konsistente Modellierung von Stützen bei der Finite-Element-Berechnung von Flachdecken, *Bautechnik 77*, Ernst & Sohn, Berlin, 2000, 416-425.
- [5] Sutter, J., Finite-Element-Berechnung von Flachdecken mit Pilzkopfverstärkung, Fachhochschule Konstanz, Betreuer: Prof. Dr.-Ing. H. Werkle, 2000
- [6] Gerold F., 3D- Modellierung von Gebäuden mit der Methode der Finiten Elemente, Diplomarbeit, Fachhochschule Konstanz, 2004, Betreuer: Prof. Dr.-Ing. H. Werkle
- [7] Enseleit J., Strukturmechanische Analyse des Entstehens von Bauwerken, Werner-Verlag, Düsseldorf, 1999