Name: ___________________________________

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein einfacher Taschenrechner nur mit Grundrechenarten und die angehängte Formelsammlung erlaubt.
- Geben Sie stets den vollständigen Lösungsweg an.
- Bearbeitungsdauer: 60 Minuten.

Aufgabe 1 Umformung einer physikalischen Gleichung	
Beim wirklichen zentralen Stoß zwischen zwei Kugeln mit den Massen m_1 und m_2, den Anfangsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 und der Stoßzahl k (k=0,7 für Stahl bei 20 Grad Celsius) findet man folgende Gleichung für die Geschwindigkeit c_1 von m_1 nach dem Stoß: $$c_1 = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot (v_2 - v_1) \cdot k}{m_1 + m_2}$$ Lösen Sie diese Gleichung nach m_2 auf.	01 ☐ 02 ☐ 03 ☐ 04 ☐

Aufgabe 2 **Wurzelgleichung**	
Gegeben ist die Gleichung $\sqrt{x-15}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$ a) Bestimmen Sie die größte **Definitionsmenge** D für die Variable x.	05 ☐ 06 ☐
b) Bestimmen Sie die **Lösungsmengen L** für die der Variable x unter Berücksichtigung der Definitionsmenge aus Aufgabe a).	07 ☐ 08 ☐

Aufgabe 3 Exponentialgleichung

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$4^{x^2+7x-15} = 2^{2 \cdot x(x-1)} \quad \text{mit } x = R$$

9 ☐

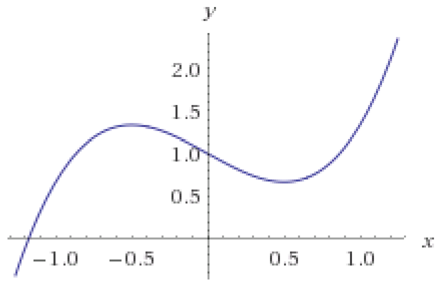
10 ☐

11 ☐

12 ☐

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion: $f(x)=\frac{4}{3}x^3-x+1$ mit $D=R$



a) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion.

13 ☐
14 ☐

b) Bestimmen Sie alle Maxima und Minima dieser Funktion mit Hilfe der Ableitungen und geben Sie jeweils den x- und den y-Wert dieser Punkte an.

15 ☐
16 ☐

c) Bestimmen Sie die Tangente an die Funktion im Punkt (0,1).

17 ☐
18 ☐

Aufgabe 5 (Aufgabe nur für Bewerber der Fachrichtung Wirtschaft / Sozialwissenschaft)	
Bestimmen Sie die reellen Variablen x und y so, dass das folgende Gleichungssystem gelöst wird. $$\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 3y & = & 17 \\ 6x & + & 3y & = & 21 \end{array}$$	19 ☐ 20 ☐ 21 ☐ 22 ☐

Aufgabe 5 (Aufgabe nur für Bewerber der technischen Fachrichtung)

a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = e^{\ln(x^{\cos(x)})}$$

19 ☐
20 ☐

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale

1) $f(x) = \frac{a}{\sqrt[5]{x^7}}$ mit $a \in R$

2) $f(x) = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi n} \sin(x)\,dx$ mit $n \in N$

21 ☐
22 ☐

Zeichen	Sprechweise / Bedeutung	Zeichen	Sprechweise / Bedeutung
$<$ $\leq$	kleiner als kleiner oder gleich	sin	Sinus
$>$ $\geq$	größer als größer oder gleich	cos	Kosinus
%	Prozent	tan	Tangens
] a, b [	offenes Intervall von a bis b	cot	Kotangens
[a, b]	abgeschlossenes Intervall von a bis b	A, B, M	Mengen
[a, b [	halboffenes Intervall von a bis b	{ a; b}	Menge mit den Elementen a und b
∞	unendlich	$\varnothing$ { }	leere Menge
f(x)	f von x (Wert der Funktion f an der Stelle x)	{ x | …}	Menge aller x, für die gilt: …
f'(x)	1. Ableitung der Funktion f	$A \cap B$	Durchschnittsmenge von A und B
$\frac{dy}{dx}$	dy nach dx, 1 Differentialquotient der Funktion y = f(x)	$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B
a^b	a hoch b (Potenz)	A \ B	Differenzmenge von A und B
$\sqrt{\ }$ $\sqrt[n]{\ }$	Quadratwurzel aus n-te Wurzel aus	$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\log_a x$	Logarithmus x zur Basis a	$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
lg x	Logarithmus x zur Basis 10	$\mathbb{Q}_+$	Menge der gebrochenen Zahlen
ln x	Logarithmus x zur Basis e	$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
lb x	Logarithmus x zur Basis 2	$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
D	Definitionsbereich einer Funktion	W	Wertebereich einer Funktion

Potenzen	Wurzeln	Logarithmen
$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ a…Basis	$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ a… Radikand	$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
$a^0 = 1$ n…Exponent	$b > 0$ n…Wurzelexponent	$a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$ a…Basis
$a^1 = a$ $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}$	$a \in \mathbb{R} \wedge a \geq 0, n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$	$b \in \mathbb{R}, b > 0$ b…Numerus
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$		$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ und $u, v > 0$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n-m}}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\log_a u^r = r \cdot \log_a u$ $r \in \mathbb{R}$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n}\log_a u$ $n \in \mathbb{N}$

Quadratische Gleichungen

	allgemeine Form	Normalform	
Gleichung	$ax^2 + bx + c = 0$	$x^2 + px + q = 0$	$a,b,c,p,q \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ a,b,c,p,q sind Konstanten
Lösungen	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	
Diskriminante	$D = b^2 - 4ac$	$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$	
Lösung in $\mathbb{R}$	$D > 0 \Rightarrow L = \{x_1; x_2\}$ $D = 0 \Rightarrow L = \{x_1\} = \{x_2\}$ $D < 0 \Rightarrow L = \varnothing$		

Proportionalität

Sachverhalt	Proportionalität	Verhältnisgleichung
Größe A | a | c ($a < c$) Größe B | b | d ($b < d$) Je mehr (größer) A, desto mehr (größer) B	direkte Proportionalität	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$
Größe A | a | c ($a < c$) Größe B | b | d ($b > d$) Je mehr (größer) A, desto weniger (kleiner) B	indirekte (oder umgekehrte) Proportionalität	$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$

Grundbeziehungen zwischen Winkelfunktionen

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$	$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	

Spezielle Funktionswerte trigonometrischer Funktionen

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$y = \cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
$y = \tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	--	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Ableitungen spezieller Funktionen					Nenner $\neq 0$
$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$ $(x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$2\tan x(1+\tan^2 x)$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$
a^x $(a>0)$	$a^x \ln a$	$a^x (\ln a)^2$	e^x	e^x	e^x
$\log_a x$ $(a>0, a\neq 1, x>0)$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\frac{-1}{x^2 \cdot \ln a}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Differentiationsregeln	$u(x), v(x)$ differenzierbar; $c \in \mathbb{R}$
Faktorregel	$y = c \cdot u \quad \Rightarrow \quad y' = c \cdot u'$
Summenregel	$y = u \pm v \quad \Rightarrow \quad y' = u' \pm v'$
Produktregel	$y = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Quotientenregel	$y = \frac{u}{v}\ (v \neq 0) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Kettenregel	$y = f(u)$ mit $u = g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(u) \cdot g'(x)$

Untersuchung von Funktionen		$f(x)$ ist mindestens zweimal differenzierbar	
Symmetrie	symmetrisch zur y-Achse	gerade Funktion	$f(x) = f(-x) \quad x \in D$
	punktsymmetrisch zu P(0;0)	ungerade Funktion	$f(-x) = -f(x) \quad x \in D$
Nullstelle	x_0 mit $f(x_0) = 0$ und $x_0 \in D$		
Monotonie	monoton wachsend in [a,b]	$f'(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$	
	monoton fallend in [a,b]	$f'(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$	
lokale Extremstellen	x_E ist Maximumstelle	$f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) < 0$	
	x_E ist Minimumstelle	$f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) > 0$	
Wendestelle	x_W ist Wendestelle	$f''(x_w) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$	

Grundbegriffe der Integralrechnung	
Stammfunktion	$F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$
unbestimmtes Integral	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ C … Integrationskonstante
bestimmtes Integral	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
Eigenschaften des bestimmten Integrals	$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ für $c \in [a,b]$

Unbestimmte Integrale		
$\int 0\,dx = C$	$\int dx = x + C$	$\int a\,dx = ax + C \quad (a \neq 0)$
$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$	$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{R},\ n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \neq 1)$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 \cdot \sqrt{x} + C \quad (x > 0)$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$