Studienkolleg

Hochschule Konstanz
Technik, Wirtschaft und Gestaltung

Studienkolleg
www.studienkolleg.htwg-konstanz.de

INFORMATIONEN ZUM AUFNAHMETEST MATHEMATIK

Inhalt

Vorbemerkung

Sehr geehrte Bewerberinnen und Bewerber,

wer studieren möchte, muss über gute Mathematikkenntnisse verfügen. Wir bereiten Sie im Studienkolleg gezielt auf das Studium vor, fangen bei der Mathematik aber nicht mit der Grundstufe an. Sie benötigen Vorkenntnisse.

Wir haben dieses Dokument erstellt, damit Sie überprüfen können, ob Ihre Vorkenntnisse für den Besuch des Studienkollegs ausreichen. Wenn Sie dieses Dokument durcharbeiten, werden Sie feststellen, welche Themen Sie schon beherrschen und welche nicht. Das Ziel ist die Diagnose, nicht die Vermittlung. Das Dokument ersetzt also nicht das Lehrbuch oder den Unterricht.

- In den **Anforderungen** (Kapitel 1) finden Sie eine Übersicht über die mathematischen Kenntnisse, die im Studienkolleg vorausgesetzt werden. Schauen Sie sich die Übersicht an und entscheiden Sie, welche Themen Sie noch wiederholen müssen.
- Bei den **Aufgaben** zur Vorbereitung auf den Aufnahmetest (Kapitel 2) finden Sie jeweils drei Aufgaben zu einem mathematischen Problem. Die Aufgaben sind unterschiedlich schwierig, Aufgabe c ist am schwierigsten.
- Die **Lösungen** der Stufe 1 (Kapitel 3) enthalten die Lösung, nützliche Formeln und Links zu Seiten im Internet.
- Die **ausführlichen Lösungen** (Kapitel 4) sind Lösungen der Stufe 2, sie zeigen also den Lösungsweg.
- Das Dokument enthält zwei **Musterprüfungen** (Kapitel 5). Sie verdeutlichen, wie der Aufnahmetest gestaltet ist.
- Die **Formelsammlung** (Kapitel 6) können Sie während der Prüfung benutzen.

Wir wünschen Ihnen eine gute Prüfungsvorbereitung und freuen uns auf Sie!

Ihr Team vom Studienkolleg der Fachhochschulen in Baden-Württemberg

Materialien zur Wiederholung und Vorbereitung

Bücher in der Buchhandlung:

1. Schäfer, Wolfgang; Georgi, Kurt; Trippler, Gisela: Mathematik-Vorkurs: Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger; 6. Aufl.; Stuttgart ; Leipzig ; Wiesbaden : Teubner, 2006; 444 S.; ISBN978-3-8351-0036-72.
2. Knorrenschild, Michael: Vorkurs Mathematik: ein Übungsbuch für Fachhochschulen von Michael Knorrenschild. München: Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2004; 174 S. ISBN 3-446-22818-7.

Quellen im Internet

1. http://www.mathe-physik-aufgaben.de/mathematik.html
2. http://www.strobl-f.de/uebmath.html (Franz Strobl hat das Wichtigste für das Fach Mathematik am Gymnasium aufbereitet und mit Übungsaufgaben versehen.)
3. http://www.rhoen-gymnasium.de/index.php?option=com_docman&task=cat_view&gid=81&Itemid=113 (Hier bietet das Rhön-Gymnasium in Bad Neustadt für die Jahrgangsstufen 5-10 Wissen und Übungen zum Fach Mathematik an)
4. http://schuelerlexikon.de/SID/c4a508a40d6d66979a286ec1fb436306/index.php?id=11 (Duden – Schülerlexikon)

Bücher in der HTWG - Bibliothek:

1. Asser, Günter; Wisliceny, Jürgen: Grundbegriffe der Mathematik.
2. Engesser, Hermann: Der kleine Duden "Mathematik". [Lexikon mathematischer Begriffe und Formeln]
3. Kusch, Lothar; Rosenthal, Hans-Joachim: Mathematik für Schule und Beruf.

1 Anforderungen

1.1 Mit Zahlen rechnen

Zentrale Begriffe: Mengen, Element, Teilmengen, Vereinigungsmenge, Schnittmenge, Differenzmenge, Zahlenmengen, Intervalle.

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	$= \{1,2,3,4,5,6,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$= \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots.\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	Periodische Dezimalbrüche
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	Alle Dezimalbrüche

Rechenoperationen

Rechenart	**Term**	**Der Term heißt**
Addition	$a + b$	Summe
Subtraktion	$a - b$	Differenz
Multiplikation	$a \cdot b = ab$	Produkt
Division	$a : b = \frac{a}{b} = a/b$	Quotient oder Bruch
Radizieren	$\sqrt[n]{a}$	n-te Wurzel von a
Potenzieren	a^n	n-te Potenz zur Basis a
Logarithmieren	$log_a(b)$	Logarithmus von b zur Basis a

Addition und Subtraktion von Summen; Auflösen und Setzen von Klammern

$a + b - c = a + b + (-c)$

$(a + b - c) - (d - e) = a + b - c - d + e$

Multiplizieren von Summen

$(a + b - c) \cdot (d - e) = ad - ae + bd - be - cd + ce$

Ausklammern eines gemeinsamen Faktors

$da + db - dc = d(a + b - c)$

Kehrzahl (Reziproke): Zu einer Zahl $a \neq 0$ heißt die Kehrzahl $\frac{1}{a}$

Rechnen mit Beträgen

Absolutbetrag $|a|$ einer Zahl a ist gleich a, wenn $a \geq 0$ und gleich $(-a)$, wenn $a < 0$. Damit ist der Betrag einer Zahl stets positiv.

Bruchrechnen

Addieren	Bei gleichen Nennern $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$
	Bei verschiedenen Nennern $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$; $\quad a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$
Subtrahieren	Bei gleichen Nennern $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$
	Bei verschiedenen Nennern $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}$; $\quad a-\frac{b}{c}=\frac{a}{1}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$
Multiplizieren	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$; $\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$
Dividieren	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$; $\quad a:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}$
Erweitern	$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ Der Zähler und der Nenner werden mit derselben Zahl multipliziert.
Kürzen	$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ Der Zähler und der Nenner werden durch dieselbe Zahl dividiert.
Mehrfachbrüche	Beispiel: $\frac{a}{b+\frac{c}{d+\frac{e}{f}}}=\frac{a}{b+\frac{c}{\frac{df+e}{f}}}=\frac{a}{b+\frac{cf}{df+e}}=\frac{a}{\frac{b(df+e)+cf}{df+e}}=\frac{a(df+e)}{bdf+be+cf}$

Binomische Formeln anwenden

$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2$
$(a-b)^2 = 1\cdot a^2 - 2\cdot ab + 1\cdot b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^2$
$(a-b)^3 = 1\cdot a^3 - 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 - 1\cdot b^3$

Koeffizienten aus dem Pascal'schen Dreieck:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Rechnen mit Potenzen

	Bei gleicher Basis	Bei gleichem Exponent
Multiplizieren	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
Dividieren	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0$ $Wenn\ n = m \Rightarrow a^0 = 1$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; b \neq 0$
Potenzen von Potenzen	$(a^n)^m = a^{nm}$	

Rechnen mit Wurzeln

	Bei gleichem Wurzelexponent
Multiplizieren	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b};\ \ a, b \geq 0$
Dividieren	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; a \geq 0, b \geq 0$

Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Zum Rechnen wandelt man Wurzeln in Potenzen um.

Rechnen mit Logarithmen

Es gilt:

$$log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Spezialfälle:

a = 10 ***Dekadischer Logarithmus***

Schreibweise: $log_{10}(\ \ )$ *oder* $lg(\ \ )$

a = e ***Natürlicher Logarithmus***

Schreibweise: $log_e(\ \ )$ *oder* $ln(\ \ )$

a = 2 ***Boolscher Logarithmus***

Schreibweise: $log_2(\ \ )$ *oder* $lb(\ \ )$

Anwenden der Logarithmen Sätze

$$log_a(b \cdot c) = log_a(b) + log_a(c); a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1$$

$$log_a(b : c) = log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a(b) - log_a(c)$$

$$log_a(b^n) = n \cdot log_a(b)$$

Umrechnung von Logarithmen mit unterschiedlichen Basen u und w:

$$log_u(a) = \frac{log_w(a)}{log_w(u)}$$

1.2 Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Äquivalenzumformungen von Gleichungen

Man darf einen Term auf **beiden Seiten** der Gleichung addieren oder subtrahieren (alle Äquivalenzumformungen **müssen auf beiden Seiten** ausgeführt werden).

Man darf **beide Seiten** der Gleichung mit einem Term multiplizieren oder durch einen Term dividieren. Dieser Term darf nicht Null sein!

Man darf Gleichungen addieren und subtrahieren.

Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

Man darf einen Term auf **beiden Seiten** der Ungleichung addieren oder subtrahieren (alle Äquivalenzumformungen **müssen auf beiden Seiten** ausgeführt werden).

Man darf **beide Seiten** der Ungleichung mit einer positiven Zahl multiplizieren oder durch eine positive Zahl dividieren. Wenn diese Zahl negativ ist, dreht man das Ungleichheitszeichen um " $>$ " $\Rightarrow$ " $<$ " bzw. " $<$ " $\Rightarrow$ " $>$ " (" $\geq$ " $\Rightarrow$ " $\leq$ " bzw. " $\leq$ " $\Rightarrow$ " $\geq$ ") . Diese Zahl darf nicht die Null sein.

Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen

Bestimmung der Lösungsmenge von Gleichungen und Ungleichungen

Lösen von linearen Gleichungssystemen mit zwei und drei Unbekannten

Anwenden von Lösungsverfahren (z.B. Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Substitutionsverfahren, Gauß Verfahren)

Systeme von Ungleichungen mit zwei Variablen

Graphische Methode anwenden

Lösen von Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

Das Lösen von Betragsgleichungen und -ungleichungen erfolgt durch Fallunterscheidung. Der Betrag $|x|$ ist stets eine positive Zahl, denn es gilt:

$$|x| = \begin{cases} x, \ falls \ x > 0 \\ 0, falls \ x = 0 \\ -x, falls \ x < 0 \end{cases}$$

Lösen Quadratischer Gleichungen

Anwenden der Lösungsformel für Quadratische Gleichungen

Für die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Ausdruck $D = b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante.

Für die Normalform $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Zerlegung in Linearfaktoren:
x_1 und x_2 sind zwei Lösungen der quadratischen Gleichung:
$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Lösen biquadratischer Gleichungen

$ax^4 + bx^2 + c = 0$
Lösung durch Substitution $z = x^2$ und anschließender Lösung der quadratischen Gleichung.

Lösen von Gleichungen höheren Grades

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; \quad a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$

$p(x)$ heißt Polynom n-ten Grades und kann als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden, wobei x_i Nullstellen des Polynoms $p(x)$ sind:

$$p(x) = a_n \cdot (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Man löst die Gleichung $p = 0$ durch Probieren (Teiler von a_0 und anschließender Polynomdivision (= Partialdivision).

Lösen von Bruchgleichungen (Unbekannte auch im Nenner)

Definitionsbereich ermitteln und dann mit dem Hauptnenner multiplizieren.

Lösen von Wurzelgleichungen durch Quadrieren

Überprüfen der Lösung durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung (Probe), weil Quadrieren keine äquivalente Umformung ist.

Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen

Die Eigenschaften der Potenz und des Logarithmus beachten.

Lösen von Trigonometrischen (goniometrischen) Gleichungen

Man wendet die trigonometrischen Formeln und den Einheitskreis an.

1.3 Prozentrechnung und Zinsrechnung

Prozentrechnung

Unter der ***Prozentrechnung*** versteht man das Rechnen mit Prozenten. Die Prozente geben hierbei das Verhältnis zweier Größen in Hundertsteln an.
Das ***Prozentzeichen %*** kann als Division durch Hundert verstanden werden:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$
$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$
$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$
$$40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$
$$100\% = \frac{100}{100} = 1{,}0$$

Prozentangaben werden verwendet, um Anteile an etwas Ganzem anzugeben, z.B.

$$30\%\ (= \boldsymbol{Prozentsatz}: \boldsymbol{p}\%)\ von\ 1300kg\ (= \boldsymbol{Grundwert\ G})$$

$$= \frac{30}{100} \cdot 1300kg = 390kg\ (= \boldsymbol{Prozentwert\ W})$$

Berechnung des ***Prozentwertes W***:

$$W = \frac{p}{100} \cdot G$$

Berechnung des ***Grundwertes G***:

$$G = \frac{W \cdot 100}{p}$$

Berechnung des ***Prozentsatzes p***:

$$p = \frac{W \cdot 100}{G}$$

Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung.
Der Grundwert wird in der Zinsrechnung als das zu verzinsende ***Kapital K*** bezeichnet, der Prozentsatz wird zum ***Zinssatz p*** und der Prozentwert wird zu den **Zinsen** (Jahreszinsen). Banken in Deutschland rechnen generell das Jahr mit 360 Tagen und den Monat mit 30 Tagen.

Berechnung der ***Jahreszinsen Z***:

$$Z = \frac{p}{100} \cdot K$$

Berechnung des ***Kapitals K***:

$$K = \frac{Z \cdot 100}{p}$$

Berechnung des ***Zinssatzes p***:

$$p = \frac{Z \cdot 100}{K}$$

Werden die Zinsen nicht pro Jahr, sondern pro Tag berechnet, so gilt für die ***Tageszinsen*** $\boldsymbol{Z_t}$, wenn t die Anzahl der Zinstage ist:

Berechnung der ***Tageszinsen*** $\boldsymbol{Z_t}$:

$$Z_t = \frac{p \cdot t}{100 \cdot 360} \cdot K$$

Werden die jährlich anfallenden Zinsen dem Kapital zugeschlagen und in den weiteren Jahren mitverzinst, so spricht man von ***Zinseszinsen***.

Ein Anfangskapital K_0 wächst bei einem Zinssatz p in n Jahren auf das Endkapital $K_n$an:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

1.4 Elementare Funktionen

Anwenden der Kenntnisse über reelle Funktionen.

Zentrale Begriffe:
Funktion, Darstellung in einem kartesischen Koordinatensystem (Graph oder Schaubild), Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie (gerade, ungerade) und Schnittpunkte zwischen zwei Funktionen

Lineare Funktion

$f(x) = m \cdot x + b$

m heißt Steigung und b der y-Achsenabschnitt. Der Graph ist eine Gerade.

Quadratische Funktion, Parabel, Scheitelpunkt

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Der Graph ist eine Parabel. Falls a>0 ist, ist die Parabel nach oben geöffnet, falls a<0 nach unten.

Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

$f(x) = ax^n + b; \;\; a \neq 0, n \in \mathbb{Z}$

Wurzelfunktionen

$f(x) = a\sqrt[n]{x^m} + b = a \cdot x^{\frac{m}{n}} + b; \;\; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, n, m \in \mathbb{N}$

Exponentialfunktionen

$f(x) = a^x + b; \;\; a > 0$

Spezialfall $f(x) = e^x$, wobei e die Euler‘sche Zahl ist.

Logarithmusfunktionen

$f(x) = log_a(x)\,; \;\; a > 0; a \neq 1, x > 0$

a = 10	***Dekadischer Logarithmus***	*Schreibweise:* $log_{10}(x)$ *oder* $lg(x)$
a = e	***Natürlicher Logarithmus***	*Schreibweise:* $log_e(x)$ *oder* $ln(x)$
a = 2	***Boolscher Logarithmus***	*Schreibweise:* $log_2(x)$ *oder* $lb(x)$

Trigonometrische Funktionen

$Sinus$: $f(x) = sin(x)$ $Kosinus$: $f(x) = cos(x)$
$Tangens$: $f(x) = tan(x)$ $Kotangens$: $f(x) = cot(x)$

Gradmaß eines Winkels α:

Unterteilung des Kreises in 360^0 Grade

Bogenmaß x eines Winkels α (im Gradmaß):

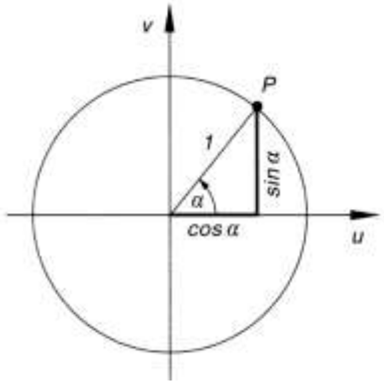
Länge des Bogens, der dem Winkel α im Einheitskreis (Radius r = 1) gegenüberliegt.

Umrechnungen:

Gradmaß (α) $\longrightarrow$ Bogenmaß (x): $x = \frac{\pi}{180^0} \cdot \alpha$

Bogenmaß (x) $\longrightarrow$ Gradmaß (α) : $\alpha = \frac{180^0}{\pi} \cdot x$

Darstellung von Sinus und Kosinus am Einheitskreis



Definition Tangens und Kotangens:

$$tan(x) := \frac{sin(x)}{cos(x)} \qquad cot(x) := \frac{cos\ (x)}{sin(x)} = \frac{1}{tan(x)}$$

Funktionseigenschaften (k $\in \mathbb{Z}$):

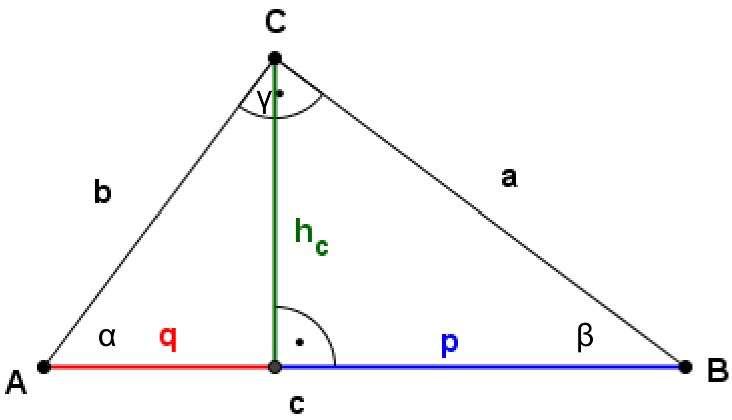
	sin(x)	cos(x)	tan(x)	cot(x)
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}$	$\mathbb{R}\ \{k \cdot \pi\}$
Wertebereich	[-1 , 1]	[-1 , 1]	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Nullstellen	$x_N = k \cdot \pi$	$x_N = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$	$x_N = k \cdot \pi$	$x_N = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens (siehe Formelsammlung)

1.5 Geometrie

Rechtwinkliges Dreieck

Ein ***rechtwinkliges Dreieck*** ist ein Dreieck mit einem rechten Winkel. Als **Hypotenuse** bezeichnet man die längste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks (Skizze = c). Sie liegt dem rechten Winkel gegenüber. Als **Kathete** wird jede der beiden kürzeren Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck bezeichnet. Die Katheten sind demnach die beiden Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, die den rechten Winkel bilden. In Bezug auf einen der beiden spitzen Winkel (in der Skizze z.B. α) des Dreiecks unterscheidet man die **Ankathete** dieses Winkels (die dem Winkel anliegende Kathete, Skizze = b) und die **Gegenkathete** (die dem Winkel gegenüberliegende Kathete, Skizze = a).



Satz des Pythagoras
In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Kathetensatz und Höhensatz des Euklid
In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b, der Hypotenuse c, den Hypotenusen Abschnitten p und q und der Höhe h_c gilt:

$$h_c^2 = p \cdot q \quad (Höhensatz)$$
$$b^2 = c \cdot q \quad a^2 = c \cdot p \quad (Kathetensatz)$$

Flächeninhalt

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

Umfang

$$U = a + b + c$$

Winkel

$$sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad tan(\alpha) = \frac{a}{b} \qquad cot(\alpha) = \frac{b}{a}$$
$$sin(\beta) = \frac{b}{c} \qquad cos(\beta) = \frac{a}{c} \qquad tan(\beta) = \frac{b}{a} \qquad cot(\beta) = \frac{a}{b}$$

2 Aufgaben

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Formelsammlung, aber ohne einen Taschenrechner. Die dritte Aufgabe "c" ist am schwierigsten.

Wenn es schwierig wird, wenden Sie sich an unsere zweistufige Hilfe: Bei der Stufe 1 bekommen Sie nur Hinweis auf die nützlichen Formeln und Lösungswege (Kapitel 3). Bei der Stufe 2 zeigen wir Ihnen die ausführliche Lösung (Kapitel 4).

Aufgabe: Berechnen Sie alle reellen Zahlen x.

2.1 Quadratische Gleichungen

1a. $x^2 + 1{,}5x - 1 = 0$

1b. $3x^2 + 5x + 4 = 0$

1c. $-x^2 + 4x - 4 = 0$

2.2 Gleichungen höheren Grades

2a. $-2x^4 + 7x^2 + 4 = 0$

2b. $-3x^3 + 4x^2 + x + 6 = 0$

2c. $2x^5 - 5x^4 + 5x^2 - 2x = 0$

2.3 Bruchgleichungen

3a.

$$\frac{x}{2x-1} - \frac{3}{4x^2-1} = \frac{3}{2x+1}$$

3b.

$$1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}}} = 0$$

3c.

$$1 + \frac{x+1}{x-1} + \frac{1 - \frac{x+1}{x-1}}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}}} = 0$$

2.4 Wurzelgleichungen

4a. $\sqrt{x^2 - 3x} = 2$

4b. $\sqrt{x^2 - 6} - \sqrt{2x - 3} = 0$

4c. $\sqrt{x - 6} - \sqrt{2x - 3} = 3$

2.5 Exponentialgleichungen

5a. $4^{x+2} - 32 = 0$

5b. $9^{x+1} + 3^{x+1} - 12 = 0$

5c. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

2.6 Logarithmusgleichungen

6a. $2\,log_3(x - 4) = 6$

6b. $log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + log_2(3^{x-1} + 1)$

6c. $log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + (log_3(x))^2 = 1$

2.7 Trigonometrische Gleichungen

7a. $6\,cos(x) = -3$

7b. $4\,sin(x) - 2\,cos(2x) = 1$

7c.

$$\frac{1 - tan(x)}{1 + tan(x)} = 1 - sin(2x)$$

2.8 Ungleichungen

8a. $2x - 5 \le 9$

8b. $x^2 - 3x > 4$

8c. $\frac{x}{x+6} < \frac{1}{x}$

2.9 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

9a. $2|x| - 3 = 4x$

9b. $x^2 - |x - 4| = 16$

9c. $|2x - 5| < 3$

2.10 Lineare Gleichungssysteme

10a.
$$\begin{aligned} -x + 2y - z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= -2 \\ x + y + 1 &= z \end{aligned}$$

10b.
$$\begin{aligned} -x + 2y - z &= 1 \\ 3x - y + 2z &= -2 \\ 2x + y + z &= -1 \end{aligned}$$

10c.
$$\begin{aligned} 4x + y - z &= 1 \\ -x - y + 3z &= 5 \\ 2x - y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

3 Lösungen

3.1 Quadratische Gleichungen

Man wendet die Lösungsformel an und beachtet den Diskriminanten Wert.

$\mathbf{1a}.\quad x_1 = -2;\quad x_2 = \frac{1}{2};\ \ Lösungsmenge\ \ L = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}.$

$\mathbf{1b}.\quad Keine\ Lösung;\quad Lösungsmenge\ \ L = \{\quad\} = \emptyset$

$\mathbf{1c}.\quad x_1 = 2;\quad x_2 = 2;\quad Lösungsmenge\ \ L = \{2\}$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.1, Seite 20.

Hilfe im Internet:
http://www.mathematik.de/ger/fragenantworten/erstehilfe/quadratischegleichungen/quadratischegleichungen.html

3.2 Gleichungen höheren Grades

Man sucht eine passende Anfangslösung und reduziert den Grad des Polynoms durch die Polynomdivision. Bei den biquadratischen Gleichungen wendet man nach der Substitution $u = x^2$ die Lösungsformel für quadratische Gleichungen an.

$\mathbf{2a}.\quad x_1 = -2;\ x_2 = 2;\ x_3\ und\ x_4\ sind\ keine\ reelle\ Zahlen.$

$Lösungsmenge\ \ L = \{-2, 2\}$

$\mathbf{2b}.\quad x_1 = 2;\ x_2\ und\ x_3\ sind\ keine\ reelle\ Zahlen.$

$Lösungsmenge\ \ L = \{2\}$

$\mathbf{2c}.\quad x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1;\ x_4 = 2; x_5 = \frac{1}{2}$

$Lösungsmenge\ \ L = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.2, Seite 20.

Hilfe im Internet:
1. http://did.mat.uni-bayreuth.de/~wn/ss_01/mueller/node9.html - Biquadratische Gleichungen
2. http://www.zum.de/Faecher/M/NRW/pm/mathe/sfs0001.htm - Polynomdivision

3.3 Bruchgleichungen

Man sucht den Definitionsbereich (Nenner darf nicht 0 sein!) und berechnet den Hauptnenner. Danach multipliziert man beide Gleichungsseiten mit dem Hauptnenner und löst die Ergebnisgleichung.

$$\mathbf{3a.}\quad x_1 = 0;\ \ x_2 = \frac{5}{2};\ \ \textit{Lösungsmenge } L = \left\{0\,, \frac{5}{2}\right\}$$

$$\mathbf{3b.}\quad x_1 = \frac{2}{3};\ \ \textit{Lösungsmenge } L = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$\mathbf{3c.}\quad \textit{Keine Lösung};\ \textit{Lösungsmenge } L = \emptyset$$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.3, Seite 21

Hilfe im Internet:
http://www.mathe1.de/mathematikbuch/zusammenfassung_bruchgleichungen_149.htm

3.4 Wurzelgleichungen

Löst man durch Quadrieren – nichtäquivalente Umformung! – deshalb Probe machen.

$$\mathbf{4a.}\quad x_1 = -1;\ \ x_2 = 4;\ \ \textit{Lösungsmenge } L = \{-1\,,4\}$$

$$\mathbf{4b.}\quad x_1 = 3;\ \ \textit{Lösungsmenge } L = \{3\}$$

$$\mathbf{4c.}\quad \textit{Keine Lösung};\ \textit{Lösungsmenge } L = \emptyset$$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.4, Seite 23.

Hilfe im Internet:
http://www.arndt-bruenner.de/mathe/pdf/wurzelgleichungen1.pdf

3.5 Exponentialgleichungen

Löst man durch Logarithmieren und, falls notwendig, durch Substitution.

$$\mathbf{5a.}\quad x_1 = \frac{1}{2};\ \ \textit{Lösungsmenge } L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\mathbf{5b.}\quad x_1 = 0;\ \ \textit{Lösungsmenge } L = \{0\}$$

$$\mathbf{5c.}\quad x_1 = \frac{3}{2};\ \ \textit{Lösungsmenge } L = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.5, Seite 24.

Hilfe im Internet:
1. http://www.johnny.ch/ot/na_exp.htm
2. http://www.klassenarbeiten.net/klassenarbeiten/uebungen/klasse10/mathematik/index.shtml

3.6 Logarithmusgleichungen

Man verwendet die Eigenschaften des Logarithmus.

$\mathbf{6a.}\quad x_1 = 31;\quad Lösungsmenge\ L = \{31\}$

$\mathbf{6b.}\quad x_1 = 1;\quad x_2 = 2;\quad Lösungsmenge\ L = \{1, 2\}$

$\mathbf{6c.}\quad x_1 = 1;\quad x_2 = \frac{1}{9};\ x_3 = 3;\quad Lösungsmenge\ L = \left\{1, \frac{1}{9}, 3\right\}$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.6, Seite 25.

Hilfe im Internet:
http://www.klassenarbeiten.net/klassenarbeiten/uebungen/klasse10/mathematik/index.shtml

3.7 Trigonometrische Gleichungen

Man verwendet die wichtigsten Trigonometrischen Formeln und einen Einheitskreis; siehe Anforderungsverzeichnis/Trigonometrische Funktionen.

$\mathbf{7a.}\quad x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\quad x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi;\quad k, n \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{7b.}\quad x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi;\quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi;\quad k, n \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{7c.}\quad x_1 = \frac{(4k+1)\pi}{4};\quad x_2 = n\pi;\quad k, n \in \mathbb{Z}$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.7, Seite 26.

Hilfe im Internet:
http://www.klassenarbeiten.de/klassenarbeiten/klasse10/mathematik/klassenarbeit80_trigonometrie.htm

3.8 Ungleichungen

Eine recht einfache Methode: Man betrachtet die Ungleichung wie eine Gleichung, sucht entsprechende Lösungen und Pole (Stützpunkte) und untersucht danach Anfangsungleichungen in den Intervallen zwischen den Stützpunkten.

$\mathbf{8a.}\ \ x \le 7\quad Lösungsmenge\ L = (-\infty, 7\,]$

$\mathbf{8b.}\ \ -\infty < x < -1\ \ und\ \ 4 < x < \infty\quad Lösungsmenge\ L = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

$\mathbf{8c.}\ \ -6 < x < -2\ \ und\ \ 0 < x < 3\quad Lösungsmenge\ L = (-6, -2) \cup (0, 3)$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.8, Seite 27.

Hilfe im Internet:
http://www.mathebibel.de/ungleichungen-loesen

3.9 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

Es gilt

$$|x| = \begin{cases} x, & falls\ x > 0 \\ 0, & falls\ x = 0 \\ -x, & falls\ x < 0 \end{cases}$$

$\mathbf{9}\boldsymbol{a}.\quad x_1 = -\frac{1}{2};\quad Lösungsmenge\ L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$\mathbf{9}\boldsymbol{b}.\quad x_1 = -5;\quad x_2 = 4;\quad Lösungsmenge\ L = \{-5\ 4\}$

$\mathbf{9}\boldsymbol{c}.\quad 1 < x < 4\quad Lösungsmenge\ L = (1, 4)$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.9, Seite 30.

Hilfe im Internet:
http://www.mathe-aufgaben.de/mathecd/12_Algebra/12611%20Betrag%20GUG%201%20STLOD.pdf

3.10 Lineare Gleichungssysteme

Wenden Sie bitte die Gauß'sche- oder Cramer'sche Methode an.

$\mathbf{10}\boldsymbol{a}.\quad x = -\frac{6}{7};\quad y = \frac{2}{7};\quad z = \frac{3}{7}$

$\mathbf{10}\boldsymbol{b}.\quad Unendlich\ viele\ Lösungen\quad x = \frac{-3(1+t)}{5};\quad y = \frac{1+t}{5};\quad z = t;\quad t \in \mathbb{R}$

$\mathbf{10}\boldsymbol{c}.\quad Keine\ Lösung$

Ausführliche Lösung: Kapitel 4.10, Seite 31.

Hilfe im Internet:
http://www.oberprima.com/index.php/lgs-loesung-gleichungssystem-nach-gauss/nachhilfe - Gaußverfahren Video

4 Ausführliche Lösungen

4.1 Quadratische Gleichungen

Man wendet die Lösungsformel

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

an und beachtet den Diskriminantenwert $D = b^2 - 4ac$.

1a. $D = 2{,}25 + 4 = 6{,}25 > 0$

$\Rightarrow zwei\ verschiedene\ Lösungen\ x_1 = -2;\ x_2 = \frac{1}{2}$

1b. $D = 25 - 48 = -23 < 0$

$\Rightarrow keine\ Lösung$

1c. $D = 16 - 16 = 0$

$\Rightarrow beide\ Lösungen\ sind\ gleich\ x_1 = x_2 = 2$

4.2 Gleichungen höheren Grades

Man sucht eine passende Anfangslösung und reduziert den Grad des Polynoms durch die Polynomdivision. Bei den biquadratischen Gleichungen wendet man nach der Substitution $x^2 = u$ die Lösungsformel für quadratische Gleichungen an.

2a.

$-2x^4 + 7x^2 + 4 = 0$

Nach der Substitution $x^2 = u$ erhält man die Gleichung

$-2u^2 + 7u + 4 = 0$

und löst diese, wie in Aufgabe 1 beschrieben ist:

$u_1 = 4;\ u_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = u_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -2$

Wenn $x^2 = u_2 = -\frac{1}{2}$ ist, bekommt man imaginäre Lösungen.

Deshalb ist die Lösungsmenge $L = \{-2; 2\}$

2b.

$-3x^3 + 4x^2 + x + 6 = 0$

Man versucht eine Lösung durch Probieren zu finden:

Man zerlegt das Absolutglied $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$

und probiert ± 1, ± 2 und ± 3 als Lösungen anzuwenden.

$+1$ und -1 passen nicht; $+2$ passt genau!

Wenn eine Lösung $x_1 = 2$ gefunden ist, teilt man die linke Seite der Gleichung durch $x - x_1 = x - 2$ und setzt das Ergebnis gleich Null:

$$(-3x^3 + 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = -3x^2 - 2x - 3 \Rightarrow -3x^2 - 2x - 3 = 0$$

$\Rightarrow$ Die Diskriminante $D = 4 - 36 < 0$ und die Lösungen x_1 und x_2 sind keine reellen Zahlen. $\Rightarrow Lösungsmenge\ L = \{2\}$

2c.

$2x^5 - 5x^4 + 5x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (2x^4 - 5x^3 + 5x - 2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0\ und\ 2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0 \Rightarrow 2 = 1 \cdot 2$

Vermutliche Lösungen sind ± 1 und ± 2
$x_2 = +1\ und\ x_3 = -1$ passen genau.

Man teilt die linke Seite der Gleichung durch $(x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$ und setzt das Ergebnis gleich Null:
$(2x^4 - 5x^3 + 5x - 2) : (x^2 - 1) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$
Die letzte Gleichung hat die Lösungen $x_4 = 2\ und\ x_5 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow Lösungsmenge\ L = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$

4.3 Bruchgleichungen

Man sucht den Definitionsbereich (Nenner darf nicht 0 sein!) und berechnet den Hauptnenner (HN). Danach multipliziert man beide Gleichungsseiten mit dem Hauptnenner und löst die Ergebnisgleichung.

$\mathbf{3a.}\ Definitionsbereich: D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

$$\frac{x}{2x-1} - \frac{3}{4x^2-1} = \frac{3}{2x+1} \quad HN \Rightarrow (2x-1) \cdot (2x+1) = 4x^2 - 1$$

$$\frac{x}{2x-1} - \frac{3}{4x^2-1} = \frac{3}{2x+1} \Big| \cdot HN \quad \Rightarrow x(2x+1) - 3 = 3(2x-1)$$

$$2x^2 + x - 3 = 6x - 3 \Rightarrow 2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(2x-5) = 0$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow Lösungsmenge\ L = \left\{0, \frac{5}{2}\right\}$$

$$\mathbf{3b.}\ 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}}} = 0 \quad Definitionsbereich \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

$$1+\frac{1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=\frac{x}{x-1}$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}=1+\frac{1}{\frac{x}{x-1}}=0\Rightarrow 1+\frac{x-1}{x}=\frac{x+x-1}{x}=\frac{2x-1}{x}$$

$$1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}}=0\Rightarrow 1+\frac{1}{x-1}+\frac{x}{2x-1}=0\quad HN=(2x-1)(x-1)$$

$$1+\frac{1}{x-1}+\frac{x}{2x-1}=0\quad |\cdot HN\quad\Rightarrow(2x-1)(x-1)+2x-1+x(x-1)=0$$

$$3x^2-2x=0\Rightarrow x_1=0\notin D\;\; und\; x_2=\frac{2}{3}\in D\;\;\Rightarrow Lösungsmenge\; L=\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$\mathbf{3c.}\;\; 1+\frac{x+1}{x-1}+\frac{1-\frac{x+1}{x-1}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}}=0\quad Definitionsbereich\quad D=\mathbb{R}\setminus\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$$

$$1+\frac{x+1}{x-1}+\frac{1-\frac{x+1}{x-1}}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}}=[\![siehe\ 3b.]\!]=1+\frac{x+1}{x-1}+\frac{1-\frac{x+1}{x-1}}{\frac{2x-1}{x}}=$$

$$1+\frac{x+1}{x-1}+\frac{\frac{-2}{x-1}}{\frac{2x-1}{x}}=1+\frac{x+1}{x-1}+\frac{-2}{x-1}\cdot\frac{x}{2x-1}$$

$$=1+\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x}{(x-1)(2x-1)}=0\quad HN=(x-1)(2x-1)$$

$$1+\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x}{(x-1)(2x-1)}=0|\cdot HN\;\Rightarrow(x-1)(2x-1)+(x+1)(2x-1)=0$$

$$4x^2-4x=0\quad\Rightarrow x_1=0\notin D\;\; und\; x_2=1\notin D$$

Keine Lösung, weil beide Werte sind wegen D ausgeschlossen.

$$\Rightarrow Lösungsmenge\; L=\emptyset$$

4.4 Wurzelgleichungen

Man löst Wurzelgleichungen durch Quadrieren – **nichtäquivalente Umformung!** – deshalb Probe machen.

4a.

$$\sqrt{x^2-3x}=2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2-3x}\right)^2=2^3 \Rightarrow x^2-3x=4 \Rightarrow x^2-3x-4=0$$

$$\Rightarrow x_1=-1;\quad x_2=4$$

Probe

$$\sqrt{(-1)^2-3(-1)}=2 \quad wahr; \qquad \sqrt{(4)^2-3(4)}=2 \quad wahr$$

$$\Rightarrow Lösungsmenge\ L=\{-1,4\ \}$$

4b.

$$\sqrt{x^2-6}-\sqrt{2x-3}=0 \quad \Rightarrow \sqrt{x^2-6}=\sqrt{2x-3}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2-6}\right)^2=\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 \Rightarrow x^2-6=2x-3 \Rightarrow x^2-2x-3=0$$

$$\Rightarrow x_1=-1;\quad x_2=3$$

Probe

$$\sqrt{(-1)^2-6}-\sqrt{2(-1)-3}=0 \quad falsch, da\ \sqrt{-5}\ \ ist\ nicht\ definiert\ (\mathbb{R}!)$$

$$\sqrt{(3)^2-6}-\sqrt{2(3)-3}=0 \quad wahr, \quad \sqrt{3}-\sqrt{3}=0$$

$$\Rightarrow Lösungsmenge\ L=\{\ 3\ \}$$

4c.

$$\sqrt{x-6}-\sqrt{2x-3}=3 \quad \Rightarrow \left(\sqrt{x-6}\right)^2=\left(3+\sqrt{2x-3}\right)^2$$

$$x-6=9+6\sqrt{2x-3}+2x-3 \Rightarrow -x-12=6\sqrt{2x-3}$$

noch einmal quadrieren

$$(-x-12)^2=36(2x-3) \Rightarrow x^2-48x+252=0$$

$$\Rightarrow x_1=6;\quad x_2=42$$

Probe

$$\sqrt{6-6}-\sqrt{2\cdot 6-3}=3 \quad falsch \quad 0-3=-3\neq 3$$

$$\sqrt{42-6}-\sqrt{2\cdot 42-3}=3 \quad wahr \quad 6-3=3$$

$$\Rightarrow Lösungsmenge\ L=\{\ 42\ \}$$

4.5 Exponentialgleichungen

Man löst z.B. durch Logarithmieren und, falls notwendig, durch Substitution.

5a.

$4^{x+2}-32=0 \Rightarrow 4^{x+2}2=32 \Rightarrow 2^{2(x+2)}=2^5 \Rightarrow 2^{2x+4}=2^5$

Linke und rechte Seiten sind gleich und Basis ist gleich ⇒ Exponenten sind gleich

$2x\ +\ 4\ =\ 5$

$x_1=\frac{1}{2}\quad \Rightarrow Lösungsmenge\ L=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

5b.

$9^{x+1}+3^{x+1}-12=0 \Rightarrow 9^{x+1}=9\cdot 9^x=9\cdot 3^{2x} \Rightarrow 9\cdot 3^{2x}+3\cdot 3^x-12=0$

$Substitution:\ \ u=3^x \Rightarrow 9u^2+3u-12=0 \Rightarrow 3u^2+u-4=0$

$\Rightarrow u_1=-\frac{4}{3};\quad u_2=1$

u_1 passt nicht, weil $u=3^x$ nicht negativ sein kann.
Für $u_2=1$ bekommen wir die Gleichung $3^x=1$.
Nach Logarithmieren zur Basis 3 bekommt man:

$log_3(3^x)=log_3(1) \Rightarrow x\,log_3(3)=0 \Rightarrow x_1=0$

$\Rightarrow Lösungsmenge\ L=\{0\}$

5c.

$4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

$3^{x-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3^x;\ \ 3^{x+\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\cdot 3^x;\ \ 2^{2x-1}=\frac{1}{2}\cdot 2^{2x}=\frac{1}{2}\cdot(2^2)^x=\frac{1}{2}\cdot 4^x$

$4^x-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3^x=\sqrt{3}\cdot 3^x-\frac{1}{2}\cdot 4^x \Rightarrow 4^x+\frac{1}{2}\cdot 4^x=\sqrt{3}\cdot 3^x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3^x$

$\frac{3}{2}\cdot 4^x=\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 3^x \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot 4^x=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot 3^x|\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot 4^x=3^x|:4^x$

$\frac{3\sqrt{3}}{8}=\left(\frac{3}{4}\right)^x \Rightarrow \frac{3\cdot 3^{\frac{1}{2}}}{4\cdot 4^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{3}{4}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^x \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow Lösungsmenge\ L=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

4.6 Logarithmusgleichungen

Man verwendet die Eigenschaften des Logarithmus.

6a.

$2\,log_3(x-4)=6 \Rightarrow log_3(x-4)=3 \Rightarrow x-4=3^3 \Rightarrow x-4=27 \Rightarrow x=31$

$\Rightarrow Lösungsmenge\ L=\{31\}$

6b.

$log_2(9^{x-1}+7)=2+log_2(3^{x-1}+1) \Rightarrow log_2(9^{x-1}+7)-log_2(3^{x-1}+1)=2$

$\Rightarrow log_2\dfrac{(9^{x-1}+7)}{(3^{x-1}+1)}=2 \Rightarrow \dfrac{(9^{x-1}+7)}{(3^{x-1}+1)}=2^2 \Rightarrow 9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1)$

$9^{x-1}=\dfrac{1}{9}\cdot 9^x=\dfrac{1}{9}\cdot 3^{2x} \qquad 3^{x-1}=\dfrac{1}{3}\cdot 3^x$

$\dfrac{1}{9}\cdot 3^{2x}+7=4\left(\dfrac{1}{3}\cdot 3^x+1\right)$

$\dfrac{1}{9}\cdot 3^{2x}-\dfrac{4}{3}\cdot 3^x+3=0|\cdot 9$

$3^{2x}-12\cdot 3^x+27=0$

$Substitution\colon\ \ u=3^x \Rightarrow u^2-12u+27=0$

$\Rightarrow u_1=3;\quad u_2=9$

$3^x=3 \Rightarrow x_1=1 \qquad 3^x=9=3^2 \Rightarrow x_1=2$

$\Rightarrow Lösungsmenge\ L=\{\,1\,,2\,\}$

6c.

$log_{3x}\left(\dfrac{3}{x}\right)+(log_3(x))^2=1, \qquad 0<x\neq\dfrac{1}{3}$

$Basiswechsel\colon\ \ log_{3x}\left(\dfrac{3}{x}\right)=\dfrac{log_3\left(\dfrac{3}{x}\right)}{log_3(3x)}$

$\dfrac{log_3\left(\dfrac{3}{x}\right)}{log_3(3x)}+(log_3(x))^2=1|\cdot log_3(3x) \Rightarrow$

$log_3\left(\dfrac{3}{x}\right)+(log_3(3x))(log_3(x))^2=log_3(3x) \Rightarrow$

$log_3(3)-log_3(x)+(log_3(x)+log_3(3))(log_3(x))^2=log_3(3x) \Rightarrow$

$1-log_3(x)+(log_3(x)+1)(log_3(x))^2=log_3(x)+1 \Rightarrow$

$-2\,log_3(x) + (log_3(x))^2 + (log_3(x))^3 = 0 \Rightarrow$

$Substitution:\ u = log_3(x)\ \Rightarrow -2u + u^2 + u^3 = 0 \Rightarrow u(u^2 + u - 2) = 0 \Rightarrow$

$u_1 = 0 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = -2 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = \frac{1}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow Lösungsmenge\ L = \left\{\frac{1}{9}, 1, 3\right\}$

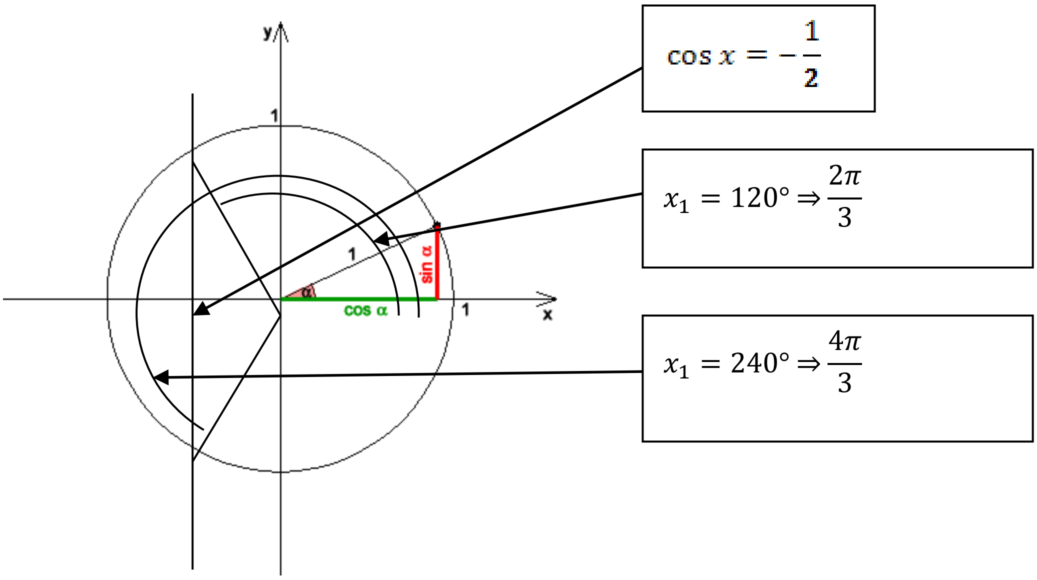
4.7 Trigonometrische Gleichungen

Man verwendet die wichtigsten Trigonometrischen Formeln und einen Einheitskreis.

7a.

$6\,cos(x) = -3 \Rightarrow cos(x) = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

Man zeichnet einen Einheitskreis



$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad x_1 = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \quad k, n \in \mathbb{Z}$

7b.

$4\,sin(x) - 2\,cos(2x) = 1$

$cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x) = 1 - sin^2(x) - sin^2(x) = 1 - 2sin^2(x)$

$\Rightarrow 4\,sin(x) - 2(1 - 2sin^2(x)) = 1 \Rightarrow 4\,sin(x) - 2 + 4sin^2(x) = 1$

$Substitution:\ \ u = sin(x) \Rightarrow 4u^2 + 4u - 3 = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} \quad u_2 = -\frac{3}{2}$

$$-1 \leq sin(x) \leq 1 \Rightarrow sin(x) \neq -\frac{3}{2}$$

Damit bleibt nur eine Lösung:

$$sin(x) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

7c.

$$\frac{1 - tan(x)}{1 + tan(x)} = 1 - sin(2x) \quad D = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{\frac{(2\pi + 1)\pi}{2}\right\} \quad k, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\frac{1 - \frac{sin(x)}{cos(x)}}{1 + \frac{sin(x)}{cos(x)}} = 1 - sin(2x) \Rightarrow \frac{\frac{cos(x) - sin(x)}{cos(x)}}{\frac{cos(x) + sin(x)}{cos(x)}} = 1 - sin(2x) \Rightarrow$$

$$\frac{cos(x) - sin(x)}{cos(x) + sin(x)} = 1 - sin(2x) \Rightarrow \frac{(cos(x) - sin(x))(cos(x) + sin(x))}{(cos(x) + sin(x))(cos(x) + sin(x))} = 1 - sin(2x)$$

$$\Rightarrow \frac{cos^2(x) - sin^2(x)}{sin^2(x) + 2\,sin(x)\,cos(x) + cos^2(x)} = 1 - sin(2x)$$

$$\Rightarrow \frac{cos^2(x) - sin^2(x)}{1 + 2\,sin(x)\,cos(x)} = 1 - sin(2x)$$

$$\Rightarrow \frac{cos(2x)}{1 + sin(2x)} = 1 - sin(2x) \Rightarrow cos(2x) = (1 + sin(2x))(1 - sin(2x))$$

$$\Rightarrow cos(2x) = 1 - sin^2(2x) \Rightarrow cos(2x) = cos^2(2x) \Rightarrow cos(2x) - cos^2(2x) = 0$$

$$\Rightarrow (cos(2x))(1 - cos(2x)) = 0 \Rightarrow cos(2x) = 0 \;\; und \;\; cos(2x) = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{(4k + 1)\pi}{4} \qquad x_2 = n\pi \qquad k, n \in \mathbb{Z}$$

4.8 Ungleichungen

Sie können eine recht einfache Methode anwenden: Man betrachtet die Ungleichung wie eine Gleichung, sucht entsprechende Lösungen und Pole (Stützpunkte) und untersucht danach Anfangsungleichungen in allen Stützpunkten und Intervallen zwischen den Stützpunkten.

8a.

$$2x - 5 \leq 9 \Rightarrow Umwandeln\ in\ die\ Gleichung \;\; 2x - 5 = 9 \;\Rightarrow x = 7\ (= Stützpunkt)$$

$$\Rightarrow Aufteilung\ in\ Intervalle \;\; I_1 = (-\infty, 7\,) \;\; und \;\; I_2 = (7\,, +\infty)$$

Beliebigen Wert aus I_1 $(z.B.\ x = 0)$ in die Anfangsgleichung einsetzen:
$2 \cdot 0 - 5 \leq 9$. Das ist wahr. Das Intervall I_1 passt zur Ungleichung.

Beliebigen Wert aus I_2 $(z.B.\ x = 8)$ in die Anfangsungleichung einsetzen:
$2 \cdot 8 - 5 \leq 9$. Das ist falsch. Das Intervall I_2 passt nicht zur Ungleichung.

Die Lösungsmenge besteht aus I_1 und $x = 7$:

$\Rightarrow Lösungsmenge\ L = (-\infty\,, 7\,]$

8b.

$x^2 - 3x > 4$

Lösen Sie die Gleichung

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -1\ und\ \ x_2 = 4 \quad (Stützpunkte)$

$\Rightarrow Aufteilung\ in\ offene\ Intervalle\ \ I_1 = (-\infty, -1)\ I_1 = (-1,4)\ I_1 = (4, +\infty)$

Beliebigen Wert aus I_1 $(z.B.\ x = -2)$ in die Anfangsungleichung einsetzen:

$(-2)^2 - 3(-2) = 10 > 4 \Rightarrow$ wahr.

Beliebigen Wert aus I_2 $(z.B.\ x = 0)$ in die Anfangsungleichung einsetzen:

$(0)^2 - 3(0) = 0 > 4 \Rightarrow$ falsch.

Beliebigen Wert aus I_3 $(z.B.\ x = 5)$ in die Anfangsungleichung einsetzen:

$(5)^2 - 3(5) = 10 > 4 \Rightarrow$ wahr.

Stützpunkt $x_1 = -1$ in die Anfangsungleichung einsetzen:

$(-1)^2 - 3(-1) = 4 > 4 \Rightarrow$ falsch

Stützpunkt $x_2 = 4$ in die Anfangsungleichung einsetzen:

$(4)^2 - 3(4) = 4 > 4 \Rightarrow$ falsch

$\Rightarrow Lösungsmenge\ L = (-\infty\,, -1\,) \cup (4, +\infty)$

8c.

$$\frac{x}{x+6} < \frac{1}{x} \rightarrow \frac{x}{x+6} = \frac{1}{x}$$

→ Pole: $x_{P1} = -6$ und $x_{P2} = 0$
Gleichungslösungen: $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$

→ Stützpunkte:
$x_1 = -2$
$x_2 = 3$
$x_{P1} = -6$
$x_{P2} = 0$

→ Intervalle:
$I_1 = (-\infty, -6)$
$I_2 = (-6, -2)$
$I_3 = (-2\,, 0\,)$
$I_4 = (\,0\,, 3\,)$
$I_5 = (\,3\,, +\infty\,)$

→ Beliebigen Wert aus I_1 (z.B. $x = -7$) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$$\frac{-7}{-7+6} < \frac{1}{-7} \rightarrow falsch$$

→ Beliebigen Wert aus I_2 (z.B. $x = -5$) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$$\frac{-5}{-5+6} < \frac{1}{-5} \rightarrow wahr$$

→ Beliebigen Wert aus I_3 (z.B. $x = -1$) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$$\frac{-1}{-1+6} < \frac{1}{-1} \rightarrow falsch$$

→ Beliebigen Wert aus I_4 (z.B. $x = 1$) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$$\frac{1}{1+6} < \frac{1}{1} \rightarrow wahr$$

→ Beliebigen Wert aus I_5 (z.B. $x = 4$) in die Anfangsungleichung einsetzen:
$$\frac{4}{4+6} < \frac{1}{4} \rightarrow falsch$$

→ alle Stützpunkte selbst passen nicht.

$\Rightarrow Lösungsmenge\ L = (-6\,, -2\,) \cup (\,0\,, 3\,)$

4.9 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

Erinnerung: es gilt

$$|x| = \begin{cases} x, & falls\ x > 0 \\ 0, & falls\ x = 0 \\ -x, & falls\ x < 0 \end{cases}$$

9a.

$2 \cdot |x| - 3 = 4x$

1)

$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow 2x - 3 = 4x$

Die Lösung $x = -\frac{3}{2}$ widerspricht der Bedingung $x \geq 0$ und fällt aus.

2)

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow -2x - 3 = 4x$

Die Lösung $x = -\frac{1}{2}$ stimmt mit der Bedingung $x < 0$ überein.

$\Rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow Lösungsmenge\ L = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

9b.

$x^2 - |x - 4| = 16$

1)

$x - 4 \geq 0 \Rightarrow |x - 4| = x - 4 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 16$

Die Lösungen sind $x_1 = -3$ und $x_2 = 4$.

Die Lösung $x_1 = -3$ widerspricht der Bedingung $x \geq 4$ und fällt aus.

Die Lösung $x_2 = 4$ stimmt mit der Bedingung $x \geq 4$ überein.

2)

$x - 4 < 0 \Rightarrow |x - 4| = -x + 4 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 16$

Die Lösungen sind $x_1 = -5$ und $x_2 = 4$.

Die Lösung $x_1 = -5$ stimmt mit der Bedingung $x < 4$ überein.

Die Lösung $x_2 = 4$ widerspricht der Bedingung $x < 4$ und fällt aus.

$\Rightarrow x_1 = -5\ und\ x_2 = 4 \Rightarrow Lösungsmenge\ L = \{-5, 4\}$

9c.

$|2x-5|<3$

1)

$2x-5 \geq 0 \Rightarrow |2x-5| = 2x-5 \Rightarrow 2x-5<3$

Die Lösung $-\infty < x < 4$ stimmt mit der Bedingung $x \geq \frac{5}{2}$ nur innerhalb des Intervalls $\left[\frac{5}{2}, 4\right)$ überein.

2)

$2x-5<0 \Rightarrow |2x-5| = -2x+5 \Rightarrow -2x+5<3$

Die Lösung $1 < x < +\infty$ stimmt mit der Bedingung $x < \frac{5}{2}$ nur innerhalb des Intervalls $(1, \frac{5}{2})$ überein.

$Lösungsmenge\ L = (1, 4)$

4.10 Lineare Gleichungssysteme

Nach dem Gauß'schen Lösungsverfahren wird das lineare Gleichungssystem (LGS) zuerst durch äquivalente Umformung auf Stufenform gebracht, dann wird die letzte Gleichung gelöst. Nun werden durch Einsetzen in die vorherigen Gleichungen schrittweise die anderen Variablen bestimmt.

10a.

$$\begin{array}{lrrrcr} Gleichung\ 1\ (G1) & -x & +2y & -z & = & 1 \\ Gleichung\ 2\ (G2) & 3x & -y & +2z & = & -2 \\ Gleichung\ 3\ (G3) & x & +y & +1 & = & z \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{lrrrcr} (G1) & -x & +2y & -z & = & 1 \\ (G2) & 3x & -y & +2z & = & -2 \\ (G3) & x & +y & -z & = & -1 \end{array} \Rightarrow$$

Man bringt das LGS auf **Stufenform**

$$\begin{array}{lrrrcr|c} (G1) & -x & +2y & -z & = & 1 & (G1) \\ (G2) & 3x & -y & +2z & = & -2 & (G2)/3+(G1) \Rightarrow \\ (G3) & x & +y & -z & = & -1 & (G3)+(G1) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrcr|c} (G1) & -x & +2y & -z & = & 1 & (G1) \\ (G2) & & \frac{5}{3}y & -\frac{1}{3}z & = & \frac{1}{3} & (G2) \\ (G3) & & 3y & -2z & = & 0 & -\frac{5}{9}(G3)+(G2) \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrrl} -x & +2y & -z & = 1 \\ & \frac{5}{3}y & -\frac{1}{3}z & = \frac{1}{3} \\ & & \frac{7}{9}z & = \frac{1}{3} \end{array}$$

Die Stufenform ist erreicht.

1) Jetzt löst man die letzte Gleichung: $z = \frac{3}{7}$
2) Dann setzt man $z = \frac{3}{7}$ in die zweite Gleichung und findet $y = \frac{2}{7}$
3) Nun setzt man $z = \frac{3}{7}$ und $y = \frac{2}{7}$ in der ersten Gleichung und findet $x = -\frac{6}{7}$

$$\Rightarrow x = -\frac{6}{7};\ y = \frac{2}{7};\ z = \frac{3}{7}$$

10b.

$$\begin{array}{lrrrrl|l} (G1) & -x & +2y & -z & = & 1 & (G1) \\ (G2) & 3x & -y & +2z & = & -2 & (G2)/3 + (G1) \Rightarrow \\ (G3) & 2x & +y & +z & = & -1 & (G3)/2 + (G1) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrl|l} & -x & +2y & -z & = 1 & \\ (G1) & & \frac{5}{3}y & -\frac{1}{3}z & = \frac{1}{3} & (G1) \\ (G2) & & & & & (G2) \quad \Rightarrow \\ (G3) & & \frac{5}{2}y & -\frac{1}{2}z & = \frac{1}{2} & -(G3)/3 + (G2)/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrl} (G1) & -x & +2y & -z & = 1 \\ (G2) & & \frac{5}{3}y & -\frac{1}{3}z & = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \\ (G3) & & & 0 & = 0 \end{array}$$

Es sind nur zwei Gleichungen mit drei Unbekannten geblieben.
In diesen Fall nimmt man eine Variable (z.B. z) als Parameter $t \in \mathbb{R}$
und löst nicht die letzte, sondern die vorletzte Gleichung: $y = \frac{1+t}{5}$.

Nun setzt man $z = t$ und $y = \frac{1+t}{5}$ in die erste Gleichung ein und findet

$$x = \frac{-3-3t}{5} = \frac{-3(1+t)}{5}$$

Weil t eine beliebige reelle Zahl ist, hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen:

$$x = \frac{-3(1+t)}{5} \quad y = \frac{1+t}{5} \quad z = t \quad mit\ Parameter\ t \in \mathbb{R}$$

10c.

$$\begin{array}{lrrrrl} (G1) & 4x & +y & -z & =1 & \Big|\ (G1) \\ (G2) & -x & -y & +3z & =5 & \Big|\ 4(G2)+(G1) \quad \Rightarrow \\ (G3) & 2x & -y & +5z & =0 & \Big|\ -2(G3)+(G1) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl} (G1) & 4x & +y & -z & =1 & \Big|\ (G1) \\ (G2) & & -3y & +11z & =21 & \Big|\ (G2) \quad \Rightarrow \\ (G3) & & 3y & -11z & =1 & \Big|\ (G3)+(G2) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrl} (G1) & 4x & +y & -z & =1 & \Big|\ (G1) \\ (G2) & & -3y & +11z & =21 & \Big|\ (G2) \quad \Rightarrow \\ (G3) & & & 0 & =22 & \Big|\ Widerspruch \end{array}$$

Keine Lösung

5 Musterprüfungen

5.1 Prüfung 1

- Taschenrechner sind nicht zugelassen.
- Sie können die Formelsammlung benutzen, die Sie mit den Aufgaben erhalten.
- Arbeitszeit: 60 Minuten

---

1. Aufgabe

Dividieren Sie die Summe aus $\frac{5}{6}$ und $3\frac{3}{4}$ durch $\frac{11}{24}$.
Stellen Sie den mathematischen Term auf und berechnen Sie mit Hilfe der Bruchrechnung (keine Dezimalzahlen!).

---

2. Aufgabe

Berechnen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$4x^3 - x - 1 \leq 2x$$

---

3. Aufgabe

Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$x^2 - \sqrt{x^2 + 1} - 5 = 0$$

---

4. Aufgabe

Lösen Sie die folgende Gleichung

$$3x + 4 - 2|x| = 2$$

---

5. Aufgabe

Lösen Sie die folgende Gleichung

$$7^x \cdot 5^{-x} - 3^{1-x} = 0$$

5.2 Prüfung 2

- Taschenrechner sind nicht zugelassen.
- Sie können die Formelsammlung benutzen, die Sie mit den Aufgaben erhalten.
- Arbeitszeit: 60 Minuten

---

1. Aufgabe

Bei einem Anbieter in Österreich kostet ein Mountain-Bike 1115.-€. Wie viel Mehrwertsteuer kommt hinzu, wenn diese 20% beträgt? Berechnen Sie den Endpreis.

---

2. Aufgabe

Berechnen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 0$$

---

3. Aufgabe

Vereinfachen Sie den folgenden Term

$$\frac{a^{k+1} - 2a^{k+2} + a^{k+3}}{a^k - a^{k+1}}$$

---

4. Aufgabe

Man berechne alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$sin(3x) - sin^3(x) = 0$$

---

5. Aufgabe

Lösen Sie die folgende Gleichung

$$log_{\sqrt{2}}(x) \cdot log_2(x) \cdot log_{2\sqrt{2}}(x) \cdot log_4(x) = 54$$

6 Formelsammlung

Diese Formelsammlung können Sie während der Prüfung benutzen.

Zeichen	Sprechweise / Bedeutung	Zeichen	Sprechweise / Bedeutung
$<$ $\leq$	kleiner als kleiner oder gleich	$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$>$ $\geq$	größer als größer oder gleich	$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
(a,b)	offenes Intervall $a < x < b,\ x \in \mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$[a,b]$	abgeschlossenes I. $a \leq x \leq b,\ x \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$[a,b)$	halboffenes I. $a \leq x < b,\ x \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	unendlich
$(a,b]$	halboffenes I. $a < x \leq b,\ x \in \mathbb{R}$	$log_a\, x$	Logarithmus x zur Basis a
$y = f(x)$	f von x (Wert y der Funktion f an der Stelle x)	$ln(x)$	Logarithmus x zur Basis e
a^b	a hoch b (Potenz)	$lg(x)$	Logarithmus x zur Basis 10
$\sqrt{a}$ $\sqrt[n]{a}$	Quadratwurzel aus a n-te Wurzel aus a	$lb(x)$	Logarithmus x zur Basis 2

Rechenart	Term		Rechenart	Term	
Addieren	$a + b$	Summe	Radizieren	$\sqrt[n]{a}$	n-te Wurzel von a
Subtrahieren	$a - b$	Differenz	Potenzieren	a^n	n-te Potenz zur Basis a
Multiplizieren	$a \cdot b = ab$	Produkt	Logarithmieren	$log_a(b)$	Logarithmus von b zur Basis a
Dividieren	$a : b = \frac{a}{b} = a/b$	Quotient			

Potenzen	Wurzeln	Logarithmen
$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ $(n - mal)$	$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$	$log_a(b) = c \Leftrightarrow a^c = b$
a $Basis$ n $Exponent$	a $Radikant$ n $Wurzelexponent$	$a = Basis$ $a \in \mathbb{R}$ $a > 0,$ $a \neq 1$
$a^0 = 1;$ $a^1 = a;$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$b > 0$	$b = Numerus$ $b \in \mathbb{R},$ $b > 0$
$a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $n \in \mathbb{N}$	$a \in \mathbb{R},$ $a \geq 0$ $n \in \mathbb{N}\backslash\{0{,}1\}$	$log_a(1) = 0;$ $log_a(a) = 1$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$log_a(u \cdot v) = log_a(u) + log_a(v)$ $u, v \in \mathbb{R},$ $u, v > 0$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$	$log_a\left(\frac{u}{v}\right) = log_a(u) - log_a(v)$ $u, v \in \mathbb{R},$ $u, v > 0$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$log_a(u^r) = r \cdot log_a(u);$ $r \in \mathbb{R}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}};$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \cdot log_a(u);\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a};$ $a \geq 0$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a};$ $a \geq 0$	Basiswechsel von Logarithmen $log_a(b) = \frac{log_c(b)}{log_c(a)} = \frac{lg(b)}{lg(a)} = \frac{ln(b)}{ln(a)}$ $(log_a(b)) \cdot (log_b(a)) = 1$
$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}};$ $a > 0$	$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}};$ $a > 0$	

Binomische Formeln	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
Mehrgliedrige Ausdrücke	
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	

Prozentrechnen					
Begriffe	*Prozentsatz 16%*	*von*	*Grundwert 400 kg*	*sind*	*Prozentwert 64 kg*
Bezeichnung	*p%*		*G*		*W*
Formel	$p\% = \frac{100 \cdot W}{G}\%$		$G = \frac{100 \cdot W}{p}$		$W = \frac{p \cdot G}{100}$
Zinsen					
Begriffe	*Zinssatz 5%*		*Kapital 700€*		*Zins 35€*
Bezeichnung	*p%*		*K*		*Z*
Formel	$p\% = \frac{100 \cdot Z}{K}\%$		$K = \frac{100 \cdot Z}{p}$		$Z = \frac{p \cdot K}{100}$
Zinseszins					
Wird ein Kapitel K_0 mit Zinssatz p% über n Jahre verzinst, so beträgt das Endkapital K_n nach n Jahren:	$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$				

Quadratische Gleichungen			
	allgemeine Form	**Normalform**	
Gleichung	$ax^2 + bx + c = 0$	$x^2 + px + q = 0$	$a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$
Lösungen	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	
Diskriminante	$D = b^2 - 4ac$		
Lösungen in $\mathbb{R}$	$D > 0 \quad \Rightarrow \quad L = \{x_1, x_2\} \quad$ *zwei verschiedene Lösungen* $D = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \{x_1\} = \{x_2\} \quad$ *zwei gleiche Lösungen* $D < 0 \quad \Rightarrow \quad L = \emptyset \quad$ *keine Lösung*		

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)

	Umkehrfunktionen
$Sinus\ f(x) = sin(x)$ $D_f = \mathbb{R} \quad W_f = [-1,+1]$ $Nullstellen: x_k = k\pi \quad k \in \mathbb{N}$ $sin(x + 2k\pi) = sin(x) \quad Periode\ 2\pi$	$Arkussinus\ f(x) = arcsin(x)$ $D_f = [-1,+1] \quad W_f = \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ $Nullstellen: x_0 = 0$
$Kosinus\ f(x) = cos(x)$ $D_f = \mathbb{R} \quad W_f = [-1,+1]$ $Nullstellen: x_k = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{N}$ $cos(x + 2k\pi) = cos(x) \quad Periode\ 2\pi$	$Arkuskosinus\ f(x) = arccos(x)$ $D_f = [-1,+1] \quad W_f = [0,+\pi]$ $Nullstellen: x_0 = 1$
$Tangens\ f(x) = tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$ $D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{N}\right\} W_f = [-\infty,+\infty]$ $Nullstellen: x_k = k\pi \quad k \in \mathbb{N}$ $tan(x + k\pi) = tan(x) \quad Periode\ \pi$	$Arkustangens\ f(x) = arctan(x)$ $D_f = \mathbb{R} \quad W_f = \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ $Nullstellen: x_0 = 0$
$Kotangens\ f(x) = cot(x) = \frac{1}{tan(x)}$ $D_f = \mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{N}\} \quad W_f = [-\infty,+\infty]$ $Nullstellen: x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{N}$ $cot(x + k\pi) = cot(x) \quad Periode\ \pi$	$Arkuskotangens\ f(x) = arccot(x)$ $D_f = \mathbb{R} \quad W_f = (0,\pi)$ $Nullstellen: keine$

Grundbeziehungen zwischen Winkelfunktionen

$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$	$sin(\alpha + \beta) = sin(\alpha)\,cos(\beta) + cos(\alpha)\,sin(\beta)$ $sin(\alpha - \beta) = sin(\alpha)\,cos(\beta) - cos(\alpha)\,sin(\beta)$ $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)\,cos(\beta) - sin(\alpha)\,sin(\beta)$ $cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha)\,cos(\beta) + sin(\alpha)\,sin(\beta)$
$cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha) = cos(2\alpha)$ $2\,sin(\alpha)\,cos(\alpha) = sin(2\alpha)$	
$sin^2(\alpha) = \frac{1 + tan^2(\alpha)}{tan^2(\alpha)}$ $cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + tan^2(\alpha)}$	

$$sin(3\alpha) = 3\,sin(\alpha) - 4sin^3(\alpha) \qquad cos(3\alpha) = 4cos^3(\alpha) + 3\,cos(\alpha)$$

$$tan(2x) = \frac{2\,tan(\alpha)}{1 - tan^2(\alpha)}$$

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{2}}, \alpha \in [0,2\pi] \qquad cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cos(\alpha)}{2}}, \alpha \in [-\pi,\pi]$$

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sin(\alpha)}{1+cos(\alpha)}$$

Spezielle Funktionswerte trigonometrischer Funktionen				
α (Gradmaß)	***x (Bogenmaß)***	***sin(x)***	***cos(x)***	***tan(x)***
0^0	0	0	1	0
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	*nicht definiert*
120^0	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135^0	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
150^0	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
180^0	π	0	-1	0
210^0	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
225^0	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
240^0	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270^0	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	*nicht definiert*
300^0	$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315^0	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
330^0	$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
360^0	2π	0	1	0

Geometrie / rechtwinkliges Dreieck ***Hypotenuse c, Katheten a und b, Winkel γ=90⁰***			
Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$		***Flächeninhalt:*** $A = \frac{a \cdot b}{2}$	
Höhensatz des Euklid: $h_c^2 = p \cdot q$		***Umfang:*** $U = a + b + c$	
Kathetensatz des Euklid: $b^2 = c \cdot q \quad a^2 = c \cdot p$			
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$	$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$	$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$	$\cot(\alpha) = \frac{b}{a}$
$\sin(\beta) = \frac{b}{c}$	$\cos(\beta) = \frac{a}{c}$	$\tan(\beta) = \frac{b}{a}$	$\cot(\beta) = \frac{a}{b}$